1. 다음 중 최솟값을 갖지 <u>않는</u> 것은?

① $y = 3x^2 + 4$

② $y = 2(x+4)^2 - 5$

③ $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$

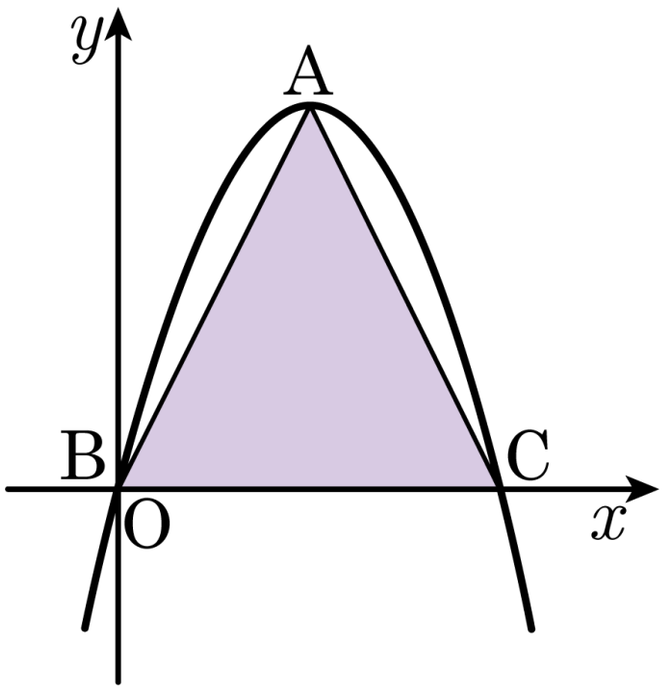
④ $y = -x^2 + 3$

⑤ $y = x^2 + 2x + 1$

해설

이차항의 계수가 양수일 때 최솟값을 갖는다.

2. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하면? (점 A 는 꼭짓점)



① 32 ② 16 ③ 8 ④ 4 ⑤ 2

해설

$y = -(x-2)^2 + 4$ 에서 A$(2,\ 4)$ 이므로 삼각형의 높이는 4 이다.
$y = x(x-4)$ 에서 B$(0,\ 0)$, C$(4,\ 0)$ 이므로 $\overline{BC} = 4$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

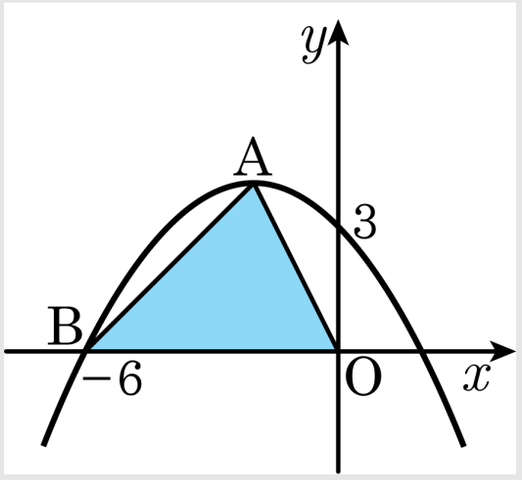
3. 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2-x+3$ 의 그래프의 꼭짓점을 A , 원점을 O , x 축과의 교점을 B 라 할 때, $\triangle AOB$ 의 넓이를 구하면? (단,B <0)

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

해설

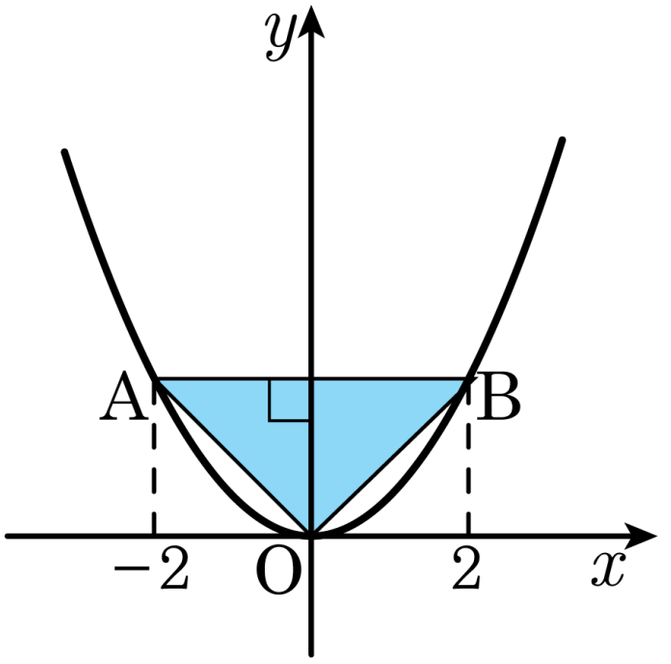
$y=-\frac{1}{4}x^2-x+3=-\frac{1}{4}(x+2)^2+4$, 꼭짓점의 좌표는 A $(-2,4)$

$y=-\frac{1}{4}x^2-x+3=-\frac{1}{4}(x+6)(x-2)$ 이므로 x 축과의 교점 B 는 $-6,0$ 이다.



$\therefore \triangle ABO=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$

4. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle AOB$ 의 넓이는 얼마인가?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{AB} = 4$ 이고,

$x = 2$ 를 대입하면 $y = 2$ 이므로

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

5. 이차함수 $y = -(x-3)^2 + 4$ 의 그래프에서 꼭짓점을 A, x 축과 만나는 두 점을 각각 B, C 라고 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

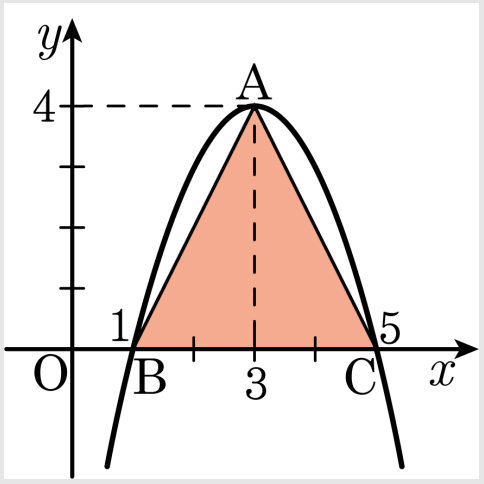
해설

$y = -(x-3)^2 + 4$ 의 그래프에서 꼭짓점은 $(3,\ 4)$ 이다.

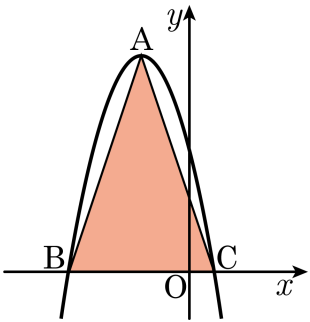
$$\begin{aligned} y &= -(x-3)^2 + 4 \\ &= -(x^2 - 6x + 9) + 4 \\ &= -(x^2 - 6x + 5) \\ &= -(x-1)(x-5) \end{aligned}$$

따라서 x 축과의 교점은 $(1,\ 0),\ (5,\ 0)$ 이다

$\therefore \triangle ABC$의 넓이 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



6. 다음 그림은 $y = -x^2 - 4x + 5$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 꼭짓점의 좌표를 A, x 축과 만나는 점을 B, C라 할 때, $\triangle ABC$의 넓이는?



① 30 ② 27 ③ 24 ④ 21 ⑤ 18

해설

$y = -x^2 - 4x + 5$
$= -(x^2 + 4x + 4 - 4) + 5$
$= -(x+2)^2 + 9$

꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 9)$ 이고
$-x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$
$(x+5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -5$ 또는 $x = 1$에서 $B(-5,\ 0)$, $C(1,\ 0)$ 이다.

따라서 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$ 이다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 식의 최솟값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

x 축 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면

$y = (x - 1 + 1)^2 - 2 + 1 = x^2 - 1$

따라서 최솟값은 -1 이다.

8. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 두 점 $(1,\ 8),\ (-1,\ 4)$ 를 지날 때, 이 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은?

① 최댓값 : 4
② 최솟값 : 4
③ 최댓값 : 1, 최솟값 : 3
④ 최댓값 : 6
⑤ 최솟값 : 1

해설

$y = x^2 + 2ax + b$가 두 점 $(1,\ 8),\ (-1,\ 4)$ 를 지나므로
$8 = 1 + 2a + b, 4 = 1 - 2a + b$
두 식을 연립하여 풀면
$a = 1, b = 5$
$\therefore y = x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$
따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값은 4

9. 이차함수 $y = x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m, $y = -x^2 - 6x - 5$ 의 최댓값을 M 이라 했을 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

$$y = x^2 + 6x - 5$$
$$= (x+3)^2 - 14$$

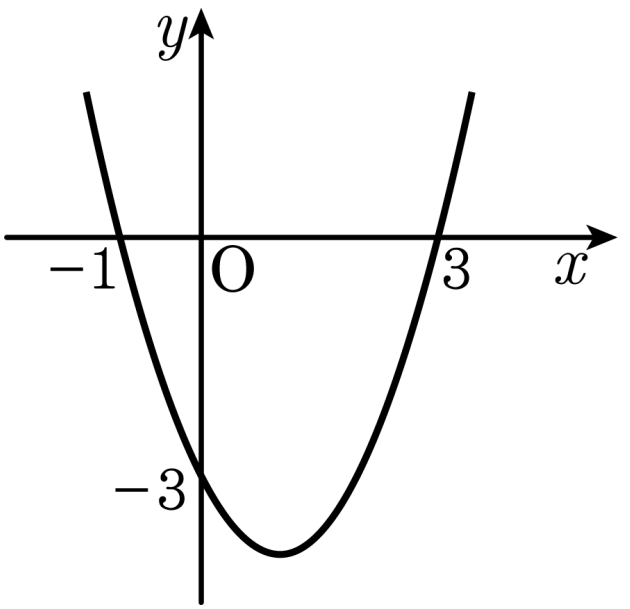
따라서 최솟값은 $m = -14$

$$y = -x^2 - 6x - 5$$
$$= -(x+3)^2 + 4$$

따라서 최댓값은 $M = 4$

$\therefore M + m = 4 + (-14) = -10$

10. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 이차함수의 최솟값을 구하면?



① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 x 절편이 $-1, 3$ 이므로 $y = a(x+1)(x-3)$ 이다.

y 절편이 -3 이므로 $a = 1$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= (x+1)(x-3) \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x-1)^2 - 4 \end{aligned}$$

따라서 (최솟값) $= -4$ 이다.

11. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 2 일 때, k 의 값을 구하면?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = -2(x^2 - 2x) + k = -2(x-1)^2 + (k+2)$ 에서

최댓값 $k + 2 = 2$

$\therefore k = 0$

12. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2 - 4ax - 6a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 7 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동하였더니 최솟값이 -3 이 되었다. 이 때, 상수 a 의 값은? (단, $a < 0$)

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$y = \frac{2}{3}x^2 - 4ax - 6a$$
$$= \frac{2}{3}(x^2 - 6ax + 9a^2 - 9a^2) - 6a$$
$$= \frac{2}{3}(x - 3a)^2 - 6a^2 - 6a$$

$y = \frac{2}{3}(x - 3a)^2 - 6a^2 - 6a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 7 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동한 식은

$y = \frac{2}{3}(x - 3a - 7)^2 - 6a^2 - 6a - 3$ 이다.

최솟값이 -3 이므로

$-6a^2 - 6a - 3 = -3$, $6a(a + 1) = 0$

$\therefore a = -1$ *or* 0

$\therefore a = -1 (\because a < 0)$

13. 이차함수 $y = x^2 + bx - a + 16$ 이 $x = 4$ 일 때, 최솟값 -2 를 갖는다. a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 0 ④ -2 ⑤ -1

해설

이차함수 $y = x^2 + bx - a + 16$ 이 $x = 4$ 일 때, 최솟값이 -2 이므로

$y = (x-4)^2 - 2 = x^2 - 8x + 14 = x^2 + bx - a + 16$

$\therefore a = 2$

14. 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 가 직선 $x = -3$ 을 축으로 하고 최댓값 2 를 가질 때, 상수 b, c 의 합 $b - c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $b - c = 1$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 2)$ 이므로 이차함수의 식은 $y = -(x + 3)^2 + 2$ 이고, 전개하면

$y = -(x + 3)^2 + 2$

$= -(x^2 + 6x + 9) + 2$

$= -x^2 - 6x - 7$ 이다.

$y = -x^2 - 6x - 7$ 이므로 $b = -6, c = -7$ 이다.

$\therefore b - c = -6 - (-7) = 1$

15. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + k + 2$ 의 최댓값이 0 일 때, k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 7

해설

$y = -3x^2 + 6x + k + 2 = -3(x-1)^2 + k + 5$

$x = 1$ 일 때, 최댓값이 $k + 5$ 이므로

$k + 5 = 0 \quad \therefore k = -5$

16. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 4)$ 이다.
$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$
$a = 4,\ b = 8$
$\therefore a + b = 12$

17. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + 8ax)$$
$$= \frac{1}{2}(x + 4a)^2 - 8a^2$$

최솟값 $-8a^2 = -8$, $a^2 = 1$

$\therefore a = -1 (\because a < 0)$

18. 이차함수 $y = -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6$ 의 최댓값을 m 이라고 할 때, m 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$y = -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6$$
$$= -2(x-a)^2 + a^2 - 6a + 6$$

최댓값 $m = a^2 - 6a + 6 = (a-3)^2 - 3$

$\therefore m$ 의 최솟값 : -3

19. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 모양이 같고, $x = -1$ 일 때, 최댓값 2 를 갖는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 할 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라.(단, a, b, c 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b + c = 2$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$, x^2 의 계수가 1 이므로 이차함수의 식은 $y = (x+1)^2 + 2$ 이다.

$y = (x+1)^2 + 2$ 을 전개하면 $y = x^2 + 2x + 3$ 이므로 $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ 이다.

$\therefore a - b + c = 1 - 2 + 3 = 2$

20. $x = -1$ 일 때, 최댓값 5 를 갖고, 점 $(0,\ 2)$ 를 지나는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3 ② -5 ③ -7 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = a(x+1)^2 + 5$ 에 $(0,\ 2)$ 를 대입하면 $a = -3$

$y = -3(x+1)^2 + 5 = -3x^2 - 6x + 2$

$\therefore a + b + c = -7$

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때, 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

모양이 같으므로 $a = -\frac{1}{2}$

꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 3)$,

따라서 $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

$\therefore\ a = -\frac{1}{2},\ b = -2,\ c = 1$

$\therefore a + b + c = -\frac{3}{2}$

22. 축의 방정식이 $x = -2$ 이고, 원점을 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 최솟값이 -1 일 때, 이 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 하면 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$y = a(x+2)^2 - 1 = a(x^2 + 4x + 4) - 1$

$4a - 1 = 0$

$\therefore a = -\frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) - 1$

$= \frac{1}{4}x^2 + x$

$a = \frac{1}{4},\ b = 1,\ c = 0$

$\therefore a + b + c = \frac{5}{4}$

23. 이차함수 $y = ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c = 0$ 의 두 근이 -1, 5 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① 45 ② 20 ③ -5 ④ -20 ⑤ -45

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -1, 5 이므로

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a(x+1)(x-5)$$
$$= a(x^2 - 4x - 5)$$
$$= a(x-2)^2 - 9a$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$\therefore a = -1$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 4x + 5$ 이고

$b = 4$, $c = 5$ 이다.

$\therefore abc = -1 \times 4 \times 5 = -20$

24. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$$
$$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4$$

y 의 최솟값 : $m = -\frac{a^2}{2} - 2a - 4$

$$= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2$$

m 의 최댓값 : -2

25. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

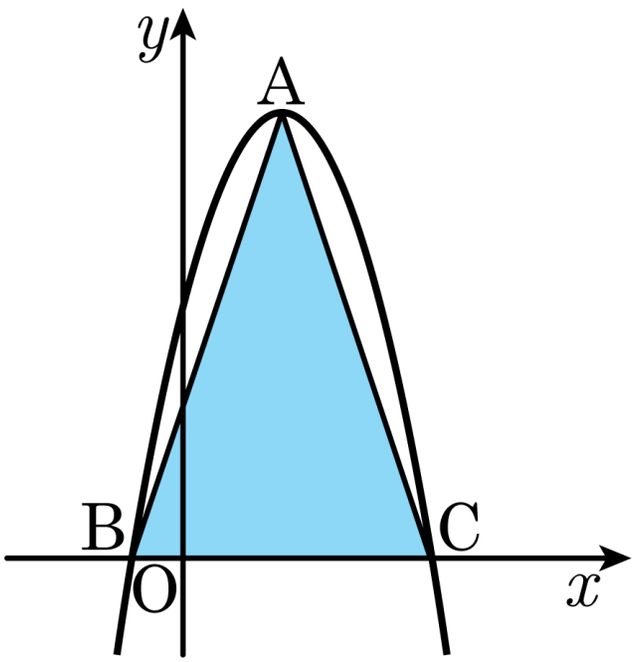
해설

$$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$$
$$= (x-a)^2 - a^2 - 2a - 5$$

y 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$
$$= -(a+1)^2 - 4$$

m 의 최댓값 : -4

26. 다음 이차함수 $y = -x^2 + 4x + 5$ 의 그래프에서 점 A 는 꼭짓점, 두 점 B 와 C 는 x 축과의 교점일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 15 ② 21 ③ 27 ④ 33 ⑤ 39

해설

$y = -x^2 + 4x + 5 = -(x-2)^2 + 9$ 에서 꼭짓점의 좌표는 $A(2, 9)$

$y = 0$ 일 때, $0 = -x^2 + 4x + 5$, $x^2 - 4x - 5 = 0$ $(x-5)(x+1) = 0$

$\therefore x = 5$ 또는 $x = -1$

따라서 두 점 B , C 의 좌표는 $B(-1, 0)$, $C(5, 0)$ 이므로 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$ 이다.

27. $x+y=3$ 일 때 $x-y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{13}{4}$

해설

$$x+y=3 \rightarrow y=-x+3$$

$$\begin{aligned} x-y^2 &= x-(-x+3)^2 \\ &= x-(x^2-6x+9) \\ &= -x^2+7x-9 \\ &= -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{13}{4} \end{aligned}$$

28. $x=1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y=a(x-1)^2-1=ax^2-2ax+a-1$

$a-1=3$, $a=4$

$y=4(x-1)^2-1$

$\therefore apq=4\times1\times(-1)=-4$

29. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

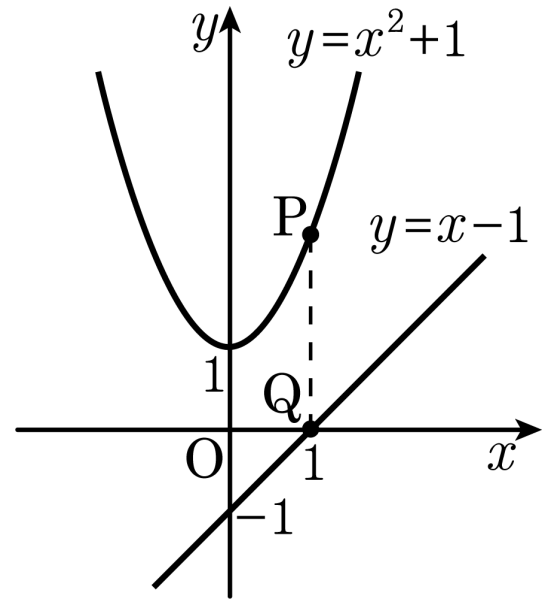
$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

30. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t-1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t-1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

31. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2사분면을 지나지 않는다고 할 때, a 의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$ ② $a \leq -\frac{3}{4}$ ③ $a \leq \frac{3}{4}$

④ $a \leq 3$ ⑤ $a \geq -3$

해설

$y = a(x-2)^2 + 3 (a < 0)$

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$

$(y\text{절편}) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$

$\therefore\ a \leq -\frac{3}{4}$

32. 이차함수 $y = -x^2 + 2mx + m$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$y = -x^2 + 2mx + m = -(x-m)^2 + (m^2 + m)$ 에서
위로 볼록이므로 최댓값은 $m^2 + m$

$$M = m^2 + m = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$\therefore M$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$

33. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$$
$$= \{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\} + 4m$$
$$= \{x - (m+1)\}^2 - (m+1)^2 + 4m$$
$\therefore$ 최솟값 $M = -(m+1)^2 + 4m$
$$= -m^2 + 2m - 1$$
$$= -(m^2 - 2m + 1)$$
$$= -(m-1)^2$$
따라서 a 의 최댓값은 0 이다.