1. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$ 공통근 : $x=1$

2. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$ 의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$ 를 전개하면
$x^3-6x^2+11x-30=0$
$x=5$ 를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

3. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1,\ x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\
 & & -1 & 4 & 7 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 $-1,\ 2$이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

4. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

5. 삼차방정식 $(x+2)(x^2+2x-a+2)=0$의 실근이 -2뿐일 때, 실수 a 값의 범위를 구하면?

① $a<-3$ ② $a<1$ ③ $a>-1$

④ $a>2$ ⑤ $a>3$

해설

실근이 -2뿐이므로 $x^2+2x-a+2=0$은 허근을 갖는다.

$D=2^2-4\times1\times(-a+2)$

$=4a-4<0$

$\therefore a<1$

6. 삼차방정식 $x^3+ax+16=0$이 중근 α와 다른 실근 β를 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -12　② -14　③ -16　④ -18　⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\alpha+\beta=0,\ \beta=-2\alpha$

$\alpha\times\alpha\times\beta=-16$에서

$-2\alpha^3=-16,\ \alpha=2,\ \beta=-4$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

일차항의 계수 $=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha=a$

$\therefore\ a=-12$

7. 방정식 $x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a의 값들의 합은?

① 30 ② 25 ③ 23 ④ 18 ⑤ 13

해설

$x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2=y$ 라고 치환하여 $y^2-ay+8-a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

ⅰ) $D=a^2-4(8-a)=a^2+4a-32=(a+8)(a-4)>0$

$\therefore a<-8$ 또는 $a>4$

ⅱ) $a>0$

ⅲ) $8-a>0 \Rightarrow a<8$

$\therefore 4<a<8$ 이므로 $a=5,\ 6,\ 7$

8. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x-y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때, $(x-y)^2 \ge 0,\ |x + y - 2| \ge 0$이므로

㉠이 성립하려면 $x - y = 0,\ x + y - 2 = 0$이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x = 1,\ y = 1$

$\therefore\ xy = 1$

9. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

10. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

11. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$　② $x^7 + y^7 = 1$　③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$　⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore \ x^2 - x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \ \Rightarrow \ x^3 + 1 = 0$

$\therefore \ x^3 = y^3 = -1, \ x + y = 1, \ xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

12. x, y에 관한 연립방정식

$\begin{cases} kx + (1-k)y = 2k+1 \\ akx + (k+1)y = b+4k \end{cases}$ 가 k의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$kx + (1-k)y = 2k+1$ ⋯⋯㉠
$akx + (k+1)y = b+4k$ ⋯⋯㉡
㉠에서 $(x-y-2)k + (y-1) = 0$
$\Rightarrow x-y-2=0,\ y-1=0$
$\therefore\ x=3,\ y=1$ ⋯⋯㉢
㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면
$(3a-3)k + (1-b) = 0$
$\therefore\ a=1,\ b=1$
$\therefore\ a+b=2$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$ 라고 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로
$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$
즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$
$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1 \ge 0$
$2a^2-4a-1 \le 0$
$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \le a \le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$
$\therefore \alpha+\beta=2$

14. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \cdots$ ㉡
$(x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1)$라고 하면
㉠ $\times 2 -$ ㉡ $\times 3 = -x + z = -10$,
$x = z + 10,\ z \geq 1$이므로
$x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

15. $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{-2n} + w^{-n} + 1$의 값들의 합을 구하면? (단, n: 양의 정수)

① 0 ② 3 ③ 4 ④ 1 ⑤ −1

해설

$w^3 = 1,\ w^2 + w + 1 = 0$이므로

(i) $n = 3k$일 때

(준식) $= (w^3)^{-2k} + (w^3)^{-k} + 1 = 3$

(ii) $n = 3k + 1$일 때

(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-2} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-1} + 1$

$$= \frac{w}{w^3} + \frac{w^2}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$$

(iii) $n = 3k + 2$일 때

(준식) $= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-4} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-2} + 1$

$$= \frac{w^2}{w^6} + \frac{w}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0$$

$\therefore n = 3k$이면 3, $n \neq 3k$이면 0

$\therefore$준식의 값들의 합은 3

16. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α를 가질 때, $a+b+c+\alpha$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 \ \cdots ① \\ b\alpha^2+c\alpha+a=0 \ \cdots ② \\ c\alpha^2+a\alpha+b=0 \ \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ : $(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

$\therefore\ a+b+c=0$

① × α − ② : $a(\alpha^3-1)=0$,

$a \neq 0$이고 α는 실수이므로 $\alpha=1$

$\therefore\ a+b+c+\alpha=1$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-2xy+4yz-4z^2=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ 의 정수해 $x,\ y,\ z$의 곱 xyz를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 6　⑤ 36

해설

$(x-y)^2-(y-2z)^2=1$

$\therefore\ (x-2y+2z)(x-2z)=1$

$x,\ y,\ z$가 정수이므로

$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-2z=1 \end{cases},\ \begin{cases} x-2y+2z=-1 \\ x-2z=-1 \end{cases}$

$x=6-y-z$를 대입하면

$\begin{cases} 3y-z=5 \\ y+3z=5 \end{cases}\ \cdots\text{(i)},$

$\begin{cases} 3y-z=7 \\ y+3z=7 \end{cases}\ \cdots\text{(ii)}$

(i)에서 $x=3,\ y=2,\ z=1$

(ii)는 만족하는 정수 근이 없다.

$\therefore\ xyz=6$

18. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 $a,\ b$라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① -6　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$

$(x-3)(x^2-4x-3) = 0$

$x^2 - 4x - 3 = 0$의 두 근이 $a,\ b(\because$ 무리수$)$

$a + b = 4$

19. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha-\beta-\gamma$ 의 값은?(단, $\alpha<\beta<\gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3-8x^2+17x-10=0$ 인수분해하여 해를 구하면
$(x-1)(x-2)(x-5)=0$
$\therefore\ \alpha=1, \beta=2, \gamma=5$
$\therefore\ \alpha-\beta-\gamma=1-2-5=-6$

20. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 <u>아닌</u> 것을 구하면?

$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$

① 4　② -4　③ -2　④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$
$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$
(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$
$\therefore x=1\pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

21. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$에서 $x = 1, x = -1$일 때 성립하므로
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + a) = 0$
따라서 모두 실근이 되려면
$x^2 + 2x + a = 0$의 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로
$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$
따라서 a의 최댓값은 1이다.

22. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$ ② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$
③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$ ④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$
⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

1	1	2a+3	-6a-5	4a+1
		1	2a+4	-4a-1
	1	2a+4	-4a-1	0

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\left\{x^2+2(a+2)x-4a-1\right\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

23. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때,$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1-\alpha)$를 곱하면
$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)(1-\alpha) = 0$,
$1-\alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n+1 = 6k(k = 1, 2, 3, \ldots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.

24. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60 ② 65 ③ 68 ④ 72 ⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \;\; b^3 = 1 \;\; c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \cdots \quad ①$

$\therefore \;\; 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로

①에서 $b = 1$ 이다.

$\therefore \;\; 21b + 44 = 65$

25. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$

㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢ $\overline{\omega} = \omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$

㉣ $\omega + \overline{\omega} = 1$

㉤ $\omega\overline{\omega} = 1$

㉥ $\omega^{2005} + \dfrac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots$ ㉠(○)

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ㉡(○)

$\therefore$근과 계수와의 관계에 의해

$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega\overline{\omega} = 1 \cdots$ ㉣(×), ㉤(○)

$\omega + \overline{\omega} = -1$이므로

$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \overline{\omega} + 1 = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \overline{\omega} \cdots$ ㉢(○)

$\omega^{2005} + \dfrac{1}{\omega^{2005}}$

$= (\omega^3)^{668}\omega + \dfrac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$

$= \omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$

$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots$ ㉥(○)