

1. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0, \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, \\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

제 1 식에서 $(x-1)(x+1)(x+3) = 0$

$\therefore x = 1, -1, -3$

제 2 식에서 $(x-1)(x+1)(x+2) = 0$

$\therefore x = 1, -1, -2$

제 3 식에서 $(x-1)^2(x-2) = 0$

$\therefore 1, 2$

$\therefore$ 공통근 : $x = 1$

2. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 의 모든 실근의 합은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 를 전개하면

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 30 = 0$$

$x = 5$ 를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

5		1	-6	11	-30
			5	-5	30
		1	-1	6	0

$$(x-5)(x^2 - x + 6) = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

3. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면
성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

따라서 실수근은 -1 , 2 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

4. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

$x^2 = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x^2 = 3 \text{ 일 때, } x = \pm\sqrt{3}$$

$$(ii) \ x^2 = -1 \text{ 일 때, } x = \pm i$$

(i), (ii) 에서 실근의 합을 구하면

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$$

5. 삼차방정식 $(x+2)(x^2+2x-a+2)=0$ 의 실근이 -2 뿐일 때, 실수 a 값의 범위를 구하면?

① $a < -3$

② $a < 1$

③ $a > -1$

④ $a > 2$

⑤ $a > 3$

해설

실근이 -2 뿐이므로 $x^2+2x-a+2=0$ 은 허근을 갖는다.

$$D = 2^2 - 4 \times 1 \times (-a+2)$$

$$= 4a - 4 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

6. 삼차방정식 $x^3 + ax + 16 = 0$ 이 중근 α 와 다른 실근 β 를 가질 때, 상수 a 의 값은?

- ① -12 ② -14 ③ -16 ④ -18 ⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \alpha + \beta = 0, \beta = -2\alpha$$

$$\alpha \times \alpha \times \beta = -16 \text{에서}$$

$$-2\alpha^3 = -16, \alpha = 2, \beta = -4$$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

$$\text{일차항의 계수} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha = a$$

$$\therefore a = -12$$

7. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합은?

① 30

② 25

③ 23

④ 18

⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$ 라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$$\text{i) } D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0 \\ \therefore a < -8 \text{ 또는 } a > 4$$

$$\text{ii) } a > 0$$

$$\text{iii) } 8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$$

$$\therefore 4 < a < 8 \text{ 이므로 } a = 5, 6, 7$$

8. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때, $(x - y)^2 \geq 0$, $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

㉠이 성립하려면 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 1$

$\therefore xy = 1$

9. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

$$x, y \text{ 는 실수이므로 } x = -1, y = 2$$

$$\therefore x + y = -1 + 2 = 1$$

10. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a 는 -10 이상 -2 이하이다.

② a 는 -2 이상 6 이하이다.

③ a 는 6 이상이다.

④ a 는 0 이하이다.

⑤ a 는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β 라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 2$$

이 두 식에서 a 를 소거하면

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 이 정수이므로

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = 0$$

$$\therefore a = 6, -2$$

11. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, $y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$

② $x^7 + y^7 = 1$

③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$

⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 는 } x^2 - x + 1 = 0 \text{ 의 근이다}$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = y^3 = -1, \quad x + y = 1, \quad xy = 1$$

$$\textcircled{1} : x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$$

$$\textcircled{2} : x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$$

$$\textcircled{3} : x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$$

$$\textcircled{4} : x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$$

$$\textcircled{5} : x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$$

12. x, y 에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} kx + (1-k)y = 2k + 1 \\ akx + (k+1)y = b + 4k \end{cases} \quad \text{가 } k \text{의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도}$$

록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$kx + (1-k)y = 2k + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$akx + (k+1)y = b + 4k \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } (x-y-2)k + (y-1) = 0$$

$$\Rightarrow x-y-2=0, y-1=0$$

$$\therefore x=3, y=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$(3a-3)k + (1-b) = 0$$

$$\therefore a=1, b=1$$

$$\therefore a+b=2$$

13. 연립방정식
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y = 2 \\ y - z = a \end{cases}$$
 가 실수해를 갖기 위한 실수 a 의

값의 범위를 $\alpha \leq a \leq \beta$ 라고 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$x = 2 - y, z = y - a$ 이므로

$$(2 - y)^2 + y^2 + (y - a)^2 = 3$$

$$\text{즉, } 3y^2 - 2(a + 2)y + a^2 + 1 = 0$$

$$D/4 = (a + 2)^2 - 3(a^2 + 1) = -2a^2 + 4a + 1 \geq 0$$

$$2a^2 - 4a - 1 \leq 0$$

$$\therefore \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2$$

14. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x 개,

1.5점짜리 문항을 y 개,

2점짜리 문항을 z 개라고 하면

$$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + y + z = 30 \cdots \textcircled{㉡}$$

($x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$)라고 하면

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} \times 3 = -x + z = -10,$$

$x = z + 10$, $z \geq 1$ 이므로

$$x = z + 10 \geq 11$$

이 때 $y = 18$ 이고 준 조건을 만족하므로

x 의 최솟값은 11

15. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{-2n} + w^{-n} + 1$ 의 값들의 합을 구하면?
(단, n : 양의 정수)

① 0

② 3

③ 4

④ 1

⑤ -1

해설

$w^3 = 1$, $w^2 + w + 1 = 0$ 이므로

(i) $n = 3k$ 일 때

$$(\text{준식}) = (w^3)^{-2k} + (w^3)^{-k} + 1 = 3$$

(ii) $n = 3k + 1$ 일 때

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-2} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-1} + 1 \\&= \frac{w}{w^3} + \frac{w^2}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0\end{aligned}$$

(iii) $n = 3k + 2$ 일 때

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (w^3)^{-2k} \cdot w^{-4} + (w^3)^{-k} \cdot w^{-2} + 1 \\&= \frac{w^2}{w^6} + \frac{w}{w^3} + 1 = w^2 + w + 1 = 0\end{aligned}$$

$\therefore n = 3k$ 이면 3, $n \neq 3k$ 이면 0

$\therefore$ 준식의 값들의 합은 3

16. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α 를 가질 때, $a+b+c+\alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

공통 실근을 α 라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots ① \\ b\alpha^2 + c\alpha + a = 0 \cdots ② \\ c\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ③ \end{cases}$$

$$① + ② + ③ : (a+b+c)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

α 가 실수일 때 $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$① \times \alpha - ② : a(\alpha^3 - 1) = 0,$$

$a \neq 0$ 이고 α 는 실수이므로 $\alpha = 1$

$$\therefore a+b+c+\alpha = 1$$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 2xy + 4yz - 4z^2 = 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$ 의 정수해 x, y, z 의 곱 xyz 를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 6

⑤ 36

해설

$$(x-y)^2 - (y-2z)^2 = 1$$

$$\therefore (x-2y+2z)(x-2z) = 1$$

x, y, z 가 정수이므로

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-2z=1 \end{cases}, \begin{cases} x-2y+2z=-1 \\ x-2z=-1 \end{cases}$$

$x = 6 - y - z$ 를 대입하면

$$\begin{cases} 3y - z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases} \dots (i),$$

$$\begin{cases} 3y - z = 7 \\ y + 3z = 7 \end{cases} \dots (ii)$$

(i)에서 $x = 3, y = 2, z = 1$

(ii)는 만족하는 정수 근이 없다.

$$\therefore xyz = 6$$

18. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$ 의 근 중에서 무리수인 두 근을 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -6

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$

$$(x - 3)(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근이 a, b ($\because$ 무리수)

$$a + b = 4$$

19. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $\alpha - \beta - \gamma$ 의 값은?(단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① -3

② -4

③ -5

④ -6

⑤ -7

해설

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 인수분해하여 해를 구하면

$$(x-1)(x-2)(x-5) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5$$

$$\therefore \alpha - \beta - \gamma = 1 - 2 - 5 = -6$$

20. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

① 4

② -4

③ -2

④ $1 + i$

⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ 또는 } X = -2$$

(i) $X = 8$ 일 때 $x^2 - 2x = 8$ 에서 $(x - 4)(x + 2) = 0$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

(ii) $X = -2$ 일 때 $x^2 - 2x = -2$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\therefore x = 1 \pm i$$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

21. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$ 의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$ 에서 $x = 1, x = -1$ 일 때
성립하므로

인수정리와 조립제법을 이용하면

$$(\text{좌변}) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + a) = 0$$

따라서 모두 실근이 되려면

$x^2 + 2x + a = 0$ 의 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

22. 삼차방정식 $x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + (4a+1) = 0$ 이 중근을 가질 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$ ② $a = -2, -2 \pm \sqrt{10}$
 ③ $a = 3, -3 \pm \sqrt{5}$ ④ $a = 1, 4 \pm \sqrt{10}$
 ⑤ $a = -1, -2 \pm 2\sqrt{2}$

해설

$f(x) = x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + 4a+1$ 이라 하면
 $f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $(x-1)$ 을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 2a+3 & -6a-5 & 4a+1 \\
 & & 1 & 2a+4 & -4a-1 \\
 \hline
 & 1 & 2a+4 & -4a-1 & 0
 \end{array}$$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$(x-1) \{x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1\} = 0$$

(i) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x \neq 1$ 인 경우

$$D = 0 \text{이므로, } a^2 + 8a + 5 = 0$$

$$\therefore a = -4 \pm \sqrt{11}$$

(ii) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x = 1$ 을 근으로 갖는 경우

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + 2(a+2) - 4a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$

23. α 는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이 되는 자연수 n 의 값으로 적당한 것은?



① 65

② 66

③ 67

④ 68

⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이므로

양변에 각각 $(1 - \alpha)$ 를 곱하면

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0,$$

$$1 - \alpha^{n+1} = 0$$

$$\therefore \alpha^{n+1} = 1$$

한편, $\alpha^3 = -1$ 이므로

$$\alpha^6 = 1$$

$$\therefore n + 1 = 6k (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$\therefore k = 11$ 일 때 $n = 65$ 가 될 수 있다.

24. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60

② 65

③ 68

④ 72

⑤ 75

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$$

$$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$$

$$= 21b + 44 \text{ 이 값이 실수이므로}$$

①에서 $b = 1$ 이다.

$$\therefore 21b + 44 = 65$$

25. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$

㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢ $\bar{\omega} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

㉣ $\omega + \bar{\omega} = 1$

㉤ $\omega\bar{\omega} = 1$

㉥ $\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots \text{㉠}(\bigcirc)$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \text{㉡}(\bigcirc)$$

$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1 \cdots \text{㉣}(\times), \text{㉤}(\bigcirc)$$

$$\omega + \bar{\omega} = -1 \text{ 이므로}$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \bar{\omega} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega} \cdots \text{㉢}(\bigcirc)$$

$$\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$= (\omega^3)^{668} \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668} \omega}$$

$$= \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots \text{㉥}(\bigcirc)$$