1. 다항식 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 을 인수분해하면?

① $(x-1)^2(x+1)$　② $(x+1)^2(x-1)$

③ $(x-1)(x+1)$　④ $(x-1)^3$

⑤ $(x+1)^3$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$

해설

인수정리를 이용하여 인수분해할 수 있다.

$f(1) = 0$,

즉 $x-1$ 로 나누어 떨어지므로

조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

2. x^4-6x^2+8를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$

② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$

③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$

④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+8 &= (x^2)^2-6x^2+8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.

$f(x)=x^4-6x^2+8$

$f(2)=0,\quad f(-2)=0,$

즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로

조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

3. 다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 순서대로 나열한 것은?

① $x^2+x+1,\ 1$

② $x^2+x+1,\ 2$

③ $2x^2+2x+2,\ 1$

④ $2x^2+2x+2,\ 2$

⑤ $4x^2+4x+4,\ 4$

해설

다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라고 하면

$$
\begin{aligned}
2x^3+x^2+x+1 &= (2x-1)Q(x)+R \\
&= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R
\end{aligned}
$$

이므로

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 2 & 2 & 2 & \boxed{2}
\end{array}
$$

$2Q(x)=2x^2+2x+2$

$\therefore\ Q(x)=x^2+x+1,\ R=2$

4. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a - b + c$ ② $c - a$ ③ $b + c$

④ $a - b$ ⑤ $c - b + a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\ &= (a - b)(a + b)(a + c) \end{aligned}$$

5. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-3$

② $x+3$

③ x^2+1

④ x^2+9

⑤ x^3+3x^2+x+3

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2+1)(x^2-9)$$
$$= (x^2+1)(x+3)(x-3)$$

⑤ $x^2(x+3)+x+3 = (x^2+1)(x+3)$

6. 자연수 $N = p^n q^m r^l$로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

7. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$ ② $(x+1)(x+2)$ ③ $(x+1)(x-2)$

④ $(x-1)(x-2)$ ⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$

$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$

$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$

$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

8. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0$, $g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1\ \therefore\ a+b=2$

9. 임의의 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $*$를 $A*B=A^2+B^2-A-B$라 할 때, 다음 중 $(x+1)*X=2(x+1)^2$을 만족하는 다항식 X는?

① $x-1$ ② $x+2$ ③ $2(x-2)$

④ $2(x+3)$ ⑤ $(x+1)(x-2)$

해설

주어진 조건에 의해, 식을 전개하면 다음과 같다.

$x^2+x+X^2-X=2x^2+4x+2$

$X^2-X=x^2+3x+2,$

$[X-(x+2)][X+(x+1)]$

따라서 $X=x+2$ 또는 $X=-x-1$

10. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$ 이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x 일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-2$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2+x-1$

④ $2x^2+x+2$ ⑤ $2x^2+x-2$

해설

최소공배수 : $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

최대공약수 : $(x-1)$

따라서 두 다항식은 x^2-x, x^2+x-2

$\therefore\ 2x^2-2$

11. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최소공배수가 x^3+5x^2-x-5이고 곱이 $x^4+6x^3+4x^2-6x-5$일 때, 두 이차식은?

① $x^2-2x+1,\ x^2+6x+5$　　② $x^2-2x+1,\ x^2-6x+5$

③ $x^2-1,\ x^2+6x+5$　　④ $x^2-1,\ x^2-6x+5$

⑤ $x^2-1,\ x^2-6x-5$

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ ($a,\ b$ 는 서로소)라고 하면
최소공배수 $L=abG$, $AB=abG^2$ 이다.
$L=x^3+5x^2-x-5=x^2(x+5)-(x+5)$
$=(x+1)(x-1)(x+5)$
$AB=x^4+6x^3+4x^2-6x-5$
$=(x+1)^2(x-1)(x+5)$
$\therefore\ G=x+1$
따라서, 두 이차식은 $(x+1)(x-1)=x^2-1$, $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$ 이다.

12. 다음은 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때, 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 A와 B의 최대공약수는 B와 R의 최대공약수와 같음을 보인 것이다.

> A와 B의 최대공약수를 G라 하고,
> $A=Ga,\ B=Gb\ (a,\ b$는 서로소$)$를
> $A=BQ+R$에 대입하면
> $Ga=GbQ+R \qquad \therefore\ R=G(a-bQ)$
> 그러므로 (가)는 B 와 R 의 공약수이다.
> 그런데, $a,\ b$ 는 서로소이므로 b 와 $a-bQ$ 사이에는 상수이외의 (나)가 없다.
> 따라서 G 는 B 와 R 의 최대공약수이다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

① $a-bQ$, 공약수
② G , 공약수
③ G , 공배수
④ $a-bQ$, 공배수
⑤ G , 서로소

해설

$A=Ga$, $B=Gb$ 를 $A=BQ+R$ 에 대입하면 $Ga=GbQ+R$
$\therefore\ R=G(a-bQ)$ 그러므로 (G)는 B 와 R 의 공약수이다.
그런데 $a,\ b$ 는 서로소이므로 b 와 $a-bQ$ 사이에는 상수 이외의 (공약수)가 없다.

13. 1999 개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot3,\ 2\cdot4,\ 3\cdot5,\ \cdots,\ 43\cdot45(=1935)$ 의 43 개

14. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$ 을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$

③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$

⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

(준 식)$= xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$

$= yx^2-y^2x+z^2x-zx^2+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$= (y-z)(x-y)(x-z)$

$= -(x-y)(y-z)(z-x)$

15. $a-b=1+i$, $b-c=1-i$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a-b=1+i$ ⋯⋯㉠

$b-c=1-i$ ⋯⋯㉡

㉠+㉡을 계산하면 $a-c=2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{1+2i-1+1-2i-1+4\}$

$=2$