

1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ 을 풀면?

- ① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2
- ② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1
- ③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2
- ④ $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ (중근)
- ⑤ $x = -1, \frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

-1		2	-1	-6	-1	2	
		-2	3	3	-2		
		2	-3	-3	2	0	
2			4	2	-2		
		2	1	-1		0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은
 $(x+1)(x-2)(2x^2+x-1) = 0$
 $(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$
 $\therefore x = -1, \frac{1}{2}, 2$

2. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

3. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
 $\therefore k = 3$

4. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

5. 방정식 $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 10

해설

$(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$ 에서

$x^2 + x = A$ 라 하면

$A^2 + 2A - 8 = 0,$

$(A + 4)(A - 2) = 0$

$\therefore A = -4$ 또는 $A = 2$

(i) $x^2 + x = -4$ 일 때,

$x^2 + x + 4 = 0$

$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

(ii) $x^2 + x = 2$ 일 때,

$x^2 + x - 2 = 0,$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$

(i), (ii)에서 실근은 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 이므로 실근의 합은

$-2 + 1 = -1$

6. 다음은 삼차방정식 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (\text{가}) = (\text{나}) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다. 또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (\text{다}) = (\text{라}) = (\text{마}) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$
따라서, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

- ① (가) $(-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$ ② (나) $-(\alpha^3 - p\alpha + 1)$
③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$ ④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0$

해설

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$
 $= -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다.
또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$
 $= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0 = 0 \quad (\because \textcircled{1})$
따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

7. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = -4$$

$\beta + \gamma = -2 - \alpha, \gamma + \alpha = -2 - \beta, \alpha + \beta = -2 - \gamma$ 를 이용하면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{-2 - \alpha}{\alpha} + \frac{-2 - \beta}{\beta} + \frac{-2 - \gamma}{\gamma}$$

$$= -2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - 3$$

$$= -2 \left(\frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \right) - 3 = -\frac{3}{2}$$

8. $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의
세 근이 α, β, γ 이므로
 $\alpha + \beta + \gamma = -2,$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3,$
 $\alpha\beta\gamma = -1$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3,$
 $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 2,$
 $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
 $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \cdots \cdots$ ①
 $x = \frac{1}{X}$ 로 놓으면
 $\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0$
 $\therefore X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \cdots \cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ 이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.
 $\therefore$ 구하는 방정식은
 $X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0$ 에서
 $abc = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

9. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$ 이 되게 하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \text{의 한 근 } \omega \\ \Rightarrow \omega^3 &= 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \\ f(n) &= 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n} \\ f(1) &= 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega \\ f(2) &= 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0 \end{aligned}$$

자연수 n 의 최솟값은 2