1. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8　② -4　③ 1　④ 4　⑤ 8

해설

$D = p^2 - 4(2p + 1)$
$\quad = p^2 - 8p - 4 = 0$
판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로
실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

2. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a의 범위를 구하면?

① $a<1$　② $a \geq 1$　③ $-1<a<1$
④ $a>1$　⑤ $a \geq -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.
$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$
$1-2+a>0$
$\therefore\ a>1$

3. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

4. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

5. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$
② $a\neq 2$ 일 때, $x=a$
③ $a=2$ 일 때, 불능
④ $a=0$ 일 때, 부정
⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$
$\Rightarrow$ $a=2$ 또는 $x=a$
ⅰ) $a=2$ 일 때 : 부정
ⅱ) $a\neq 2$ 일 때 : $x=a$

6. 방정식 $a(ax-1)=2(ax-1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, 부정　　② $a=2$ 일 때, 불능

③ $a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$　　④ $a\neq 0$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

해설

$a(ax-1)=2(ax-1), a^2x-2ax=a-2$ 에서
$a(a-2)x=a-2$

i) $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

ii) $a=2$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)

iii) $a=0$ 일 때, $0\cdot x=-2$ 이므로 해가 없다. (불능)

따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

7. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$ 의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

$|x-1|$이 존재하므로 절댓값의 부호에 따라서
$x-1\ge 0,\ x-1<0$으로 구간을 나누면
i) $x\ge 0$ 일 때, $|x-1|=x-1$
$(x-1)^2+(x-1)-6=0$
$(x-3)(x+2)=0\ \therefore\ x=-2,\ 3$
하지만 $x\ge 0$이므로 $x=3$
ii) $x<0$ 일 때, $|x-1|=-(x-1)$
$(x-1)^2-(x-1)-6=0$
$(x-4)(x+1)=0\ \therefore\ x=-1,\ 4$
하지만 $x<0$이므로 $x=-1$
$\therefore$ 두 근의 합은 $3+(-1)=2$

8. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$

$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

9. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(ⅰ) $x \geq 1$일 때
$x^2-2x+1+x-1-6=0$
$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로
$x=-2, x=3$
그런데 $x \geq 1$이므로 $x=3$
(ⅱ) $x<1$일 때
$x^2-2x+1-x+1-6=0$
$x^2-3x-4=0$, $(x-4)(x+1)=0$
$x=-1, x=4$
그런데 $x<1$이므로 $x=-1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3, -1$이므로
두 근의 합은 2

10. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \le x < 2$일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2} - 1$　　② $\sqrt{2} + 1$　　③ $\sqrt{3} + 2$

④ $\sqrt{3} - 1$　　⑤ $\sqrt{3} - 2$

해설

(i) $0 \le x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$-4x - 1 = 0$

$\therefore\ x = -\frac{1}{4}$(부적합)

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$4x^2 - 4x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

$1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

$\therefore\ 2\alpha = \sqrt{2} + 1$

11. $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(ⅰ) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0$, $x(2x - 1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ⅱ) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0$, $(x + 1)(2x - 3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $\frac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

12. 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 한 근이 $2+ai$일 때 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　　② -5　　③ 3　　④ 6　　⑤ 12

해설

한 근이 $2+ai$이므로 다른 한 근은 $2-ai$이다.

$\therefore$ 두 근의 합 $-a=4$　$\therefore a=-4$

두 근의 곱 $(2-4i)(2+4i)=4+16=2b$

$\therefore b=10$

$\therefore a+b=10-4=6$

13. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$
② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$
⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

14. x에 관한 이차방정식 $(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$이 중근을 갖도록 하는 m의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$

(i) 이차방정식이므로 $m^2-1\neq 0$

$\therefore\ m\neq 1,-1$

(ii) 중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m^2-1)=0$

$m^2-2m+1-3m^2+3=0$

$m^2+m-2=0$

$(m+2)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1,-2$

$\therefore$(i)과 (ii)에서 $m=-2$일 때만 중근을 갖는다.

15. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$
㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서
$D = b^2 - 4a > 0$
㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서
$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.
㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서
$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

16. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}$ ……㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

17. x에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$

$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$

$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$\therefore a + b = 0$

18. 방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 갖도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+2b$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

준식에서 $\dfrac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+k+b)$

$=(2a-1)k+a^2-b=0$

이것이 k에 대한 항등식이 되어야 하므로

$2a-1=0, \quad a^2-b=0$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}, \quad b=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a+2b=1$

19. x의 이차방정식 $x^2-(2a+2+m)x+a^2+4a-n=0$이 a의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n을 정할 때, $m+n$의 값은?

① -3　　② -2　　③ 1　　④ 3　　⑤ 4

해설

$D=(2a+2+m)^2-4(a^2+4a-n)=0$

이 등식을 a에 관하여 정리하면

$4a(m-2)+m^2+4m+4n+4=0$

이 등식이 a에 관계없이 항상 성립하려면

$4(m-2)=0,\ m^2+4m+4n+4=0$

$\therefore\ m=2,\ n=-4$　　$\therefore\ m+n=-2$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b의 값은?

① $a=1,\ b=1$ ② $a=1,\ b=0$

③ $a=0,\ b=1$ ④ $a=-1,\ b=0$

⑤ $a=-1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로,

$(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$-2ak+(b-1)=0$

$\therefore\ a=0, b=1$

21. x에 관한 이차방정식$x^2 + 2(m+a+2)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수의 a, b의 값을 정할 때. $a+b$의 값은?

① 0　　② 4　　③ 2　　④ -1　　⑤ -3

해설

중근 : $\frac{D}{4} = 0$

m값에 관계없이 성립 : m에 대한 항등식

$\frac{D}{4} = (a+m+2)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0$

$m \cdot (2a+4) + (4+4a+2b) = 0$

$2a+4=0, \quad a=-2$

$4+4a+2b=0, \quad b=2$

$\therefore \ a+b=0$

22. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+ka-2k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 0　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$D' = 2^2-(ka-2k+b)=0$

$\Rightarrow \quad (2-a)k+4-b=0$

모든 k에 대하여 성립하려면

$a=2,\ b=4$

$\therefore\ a+b=6$

23. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $mx^2+2(a-b-m)x-a+m+1=0$ 이 m의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 a, b의 값은?

① $a=-1,\ b=0$　② $a=-1,\ b=-1$
③ $a=0,\ b=1$　④ $a=1,\ b=1$
⑤ $a=1,\ b=2$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때,
$m \neq 0$이고, 중근을 가지려면
$D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(a-b-m)^2-m(-a+m+1)$
$a^2+b^2-2ab+2bm-am-m=0$
이 때, 이 등식이 m의 값에 관계없이
항상 성립해야 하므로
m에 대하여 정리하면
$(2b-a-1)m+(a-b)^2=0$
$2b-a-1=0,\ (a-b)^2=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=1$

24. x에 대한 이차식 $a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① a를 빗변으로 하는 직각삼각형

② b를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ c를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(c-a)x^2-2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$c-a \neq 0$이고, $\dfrac{D}{4}=0$이어야 한다.
$\dfrac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$
$b^2-(c^2-a^2)=0, \quad b^2-c^2+a^2=0$
$\therefore c^2=b^2+a^2$
따라서 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

25. x 에 대한 다항식 $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)-4$ 를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x^2+2x+4)(x^2+2x-1)$

② $(x^2+2x+4)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

③ $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

④ $(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

해설

$x^2+2x=Y$ 라 하면,
(준식)
$=Y^2+3Y-4=(Y-1)(Y+4)$
$=(x^2+2x-1)(x^2+2x+4)$
$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

26. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$
② $a < -2$ 또는 $a > 2$
③ $1 < a < -1$
④ $-2 < a < 2$
⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
$\therefore$ $a < -2$ 또는 $a > 2$

27. 다음 중 이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단,a, b 는 실수)

① 항상 x 축과 만난다.

② 항상 x 축과 만나지 않는다.

③ a, b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.

④ a, b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.

⑤ a, b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프와
x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2-2(a+b)x+ab=0$ 의 실근의 개수와 같다.
이차방정식 $x^2-2(a+b)x+ab=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$$ 이므로 임의의 실수 a, b 에 대하여 항상 실근을 갖는다.

따라서, 이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

28. 직선 $y = ax + 1$ 이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 5$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 3x + 5$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < -7$ 또는 $a > 1$　　② $-1 < a < 7$

③ $a < 7$　　④ $-7 < a < 1$

⑤ $1 < a < 7$

해설

$ax + 1 = x^2 - 3x + 5$ 에서 $x^2 - (a+3)x + 4 = 0$
서로 다른 두 점에서 만나므로
$D = (a+3)^2 - 4 \cdot 4 > 0$
$a < -7$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉠
$ax + 1 = x^2 + 3x + 5$ 에서 $x^2 + (3-a)x + 4 = 0$
만나지 않으므로 $D = (3-a)^2 - 4 \cdot 4 < 0$
$-1 < a < 7 \cdots$ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡ 의 공통범위는 $1 < a < 7$

29. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하여라.

① $m < -2,\ \ m > \frac{2}{3}$　　② $m < -1,\ \ m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2,\ \ m > 2$　　④ $m < 2,\ \ m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\ \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족시키도록 m을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서 판별식
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$
$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\ \ m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

30. 이차함수 $y = x^2 - px + q$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나고, x축과 단 한 점에서 만나도록 $p,\ q$의 값을 정할 때, $p + q$의 값으로 가능한 수는?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$y = x^2 - px + q \cdots$ ㉠의 그래프는
점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $1 = 1 - p + q$
$\therefore\ p = q \cdots$ ㉡
또, ㉠의 그래프가 x축과 단 한 점에서 만나므로,
㉠에서 $y = 0$으로 한 이차방정식
$x^2 - px + q = 0$은 중근을 갖는다.
따라서 판별식을 D라 하면
$D = p^2 - 4q = 0 \cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서 $p^2 - 4p = 0$
$\therefore\ p(p-4) = 0 \quad \therefore\ p = 0,\ 4$
$\therefore\ p = 0, q = 0$ 또는 $p = 4, q = 4$

31. 이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와 직선 $y = x + 3a$가 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-12 < a < 1$　② $-12 < a < 2$　③ $-11 < a < 1$
④ $-11 < a < 2$　⑤ $-10 < a < 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와
직선 $y = x + 3a$는 서로 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 + ax + 3 = x + 3a$,
즉 $x^2 + (a-1)x + 3 - 3a = 0$에서
$D = (a-1)^2 - 4(3-3a) < 0$
$a^2 + 10a - 11 < 0$, $(a+11)(a-1) < 0$
$\therefore\ -11 < a < 1$

32. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두근의합) $= 0 + (-3) = \dfrac{b+5}{a}$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

(두 근의 곱) $= 0 \cdot (-3) = \dfrac{-a-2}{a}$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

33. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α, β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

i) $x<-1$일 때,
$-(x+1)-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)
ii) $-1\le x<2$일 때,
$x+1-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=0$
iii) $x\ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$
(i), (ii), (iii)에 의해 $x=0,\ 4$
$\therefore\ \alpha+\beta=4$

34. $x^2 + 3ax + b = 0$과 $x^2 - ax + c = 0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$가 최소가 되는 a의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

조건에서
$1 + 3a + b = 0 \ \cdots$ ㉠
$1 - a + c = 0 \ \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ : $4a + b - c = 0$
$\therefore\ b - c = -4a$
$\therefore\ 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a-1)^2 - 2$
따라서 $a = 1$일 때, 최소이다.

35. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4　　② 2　　③ −1　　④ 5　　⑤ −5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

36. $2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2x^2-3xy+my^2-3x+y+1$
$=2x^2-(3y+3)x+my^2+y+1$
이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로
$D=(3y+3)^2-8(my^2+y+1)$
$\quad=9y^2+18y+9-8my^2-8y-8$
$\quad=(9-8m)y^2+10y+1$
여기서 $D/4=25-(9-8m)=0$이어야 하므로
$25-9+8m=0$
$8m=-16$
$\therefore m=-2$

37. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 하면
$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=3k-11$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$
따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$이므로
$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$
$\therefore\ k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

38. n 이 자연수이고 α_n, β_n 이 이차방정식 $(n+\sqrt{n(n-1)})x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$ 의 두 실근일 때, $(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+...+\beta_{49})$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 7

해설

$\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$

근과 계수의 관계에 따라

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

$\alpha_1+\beta_1=\sqrt{1}-0$

$\alpha_2+\beta_2=\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$\vdots$

$\alpha_{49}+\beta_{49}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{49})$

$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{49}+\beta_{49})$

$=1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$

$=\sqrt{49}=7$

39. 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근을 $\dfrac{1}{(1+i)^2}$이라 할 때, $f(2x+3)=0$의 두 근의 합은? (단, a,b,c는 실수)

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{1}{(1+i)^2}=\dfrac{1}{1+2i-1}=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{1}{2}i$

$f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-\dfrac{1}{2}i$이면

a,b,c가 실수이므로 다른 한 근은 $\dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ f(x)=0$의 두 근의 합은 0

$f(2x+3)=0$의 두 근을 α,β라 하자.

$(2\alpha+3)+(2\beta+3)=0$

$2(\alpha+\beta)=-6$

$\therefore\ \alpha+\beta=-3$

40. 이차항의 계수가 1 인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$이라 하면
$x^2 + bx + (c + 1) = 0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 $-7,\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

41. x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+6k=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2+\overline{\omega}^2=16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

방정식 $x^2+2kx+6k=0$ 이 허근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-6k<0,\quad k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-2k,\ \omega\overline{\omega}=6k$이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-2k)^2-12k$

$=4k^2-12k$

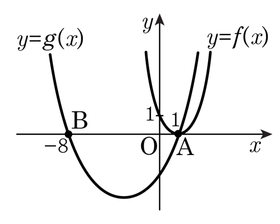
$4k^2-12k=16,$

즉, $k^2-3k-4=0$ 에서

$(k+1)(k-4)=0\qquad\therefore\ k=-1$ 또는 $k=4$

$0<k<6$ 이므로 $k=4$

42. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x축과 점 A$(1,\ 0)$에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 x축과 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(-8,\ 0)$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$의 근은?



① $x = 1$　② $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

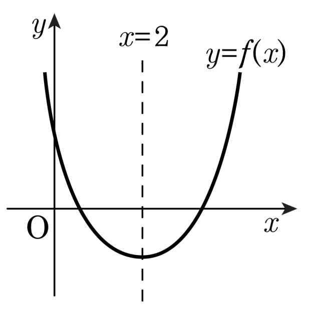
③ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$　④ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+8)(x-1)$이므로
$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$
따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,
즉 $3x^2 + 12x - 15 = 0$ 의 근은 $3(x+5)(x-1) = 0$
$\therefore x = -5$ 또는 $x = 1$

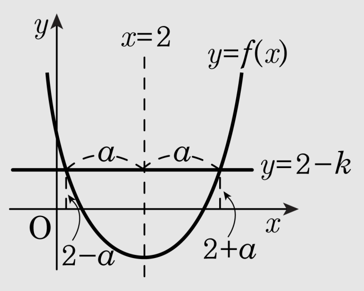
43. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$를 만족시키는 x의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$의 교점의 x좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
(ii) $f(x) = 2 + k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

44. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = mx - 2$보다 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $-6 < m < 2$　② $-4 < m < 1$　③ $-2 < m < 0$
④ $2 < m < 5$　⑤ $4 < m < 6$

해설

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2x + 2 > mx - 2$ 가 성립하므로
$x^2 - (m+2)x + 4 > 0$ 에서
이차방정식 $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면
$D = (m+2)^2 - 16 < 0$
$(m+6)(m-2) < 0$
$\therefore -6 < m < 2$

45. 이차함수 $y=(x-5)^2+1$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=10$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 16 ② 20 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30

해설

이차함수 $y=(x-5)^2+1$ 의 그래프는
직선 $x=5$ 에 대하여 대칭이고
$\overline{\mathrm{PQ}}=10$ 이므로 두 점 P, Q 의 x 좌표는
각각 0, 10 이다.
따라서 점 P (또는 Q) 의 y 좌표를 구하면
$(0-5)^2+1=26$ 이므로
$\therefore\ a=26$

46. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

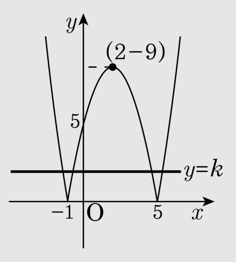
① $0<k<3$　② $0<k<5$　③ $3<k<5$

④ $1<k<4$　⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



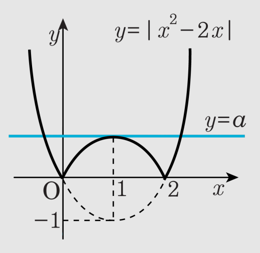
따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

47. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② 0　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.
$y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ 에서
꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$
$\therefore\ a = 1$

48. x의 방정식 $(x-a)(x-b)-cx=0$의 해가 α, β일 때, x의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$의 해를 a, b로 나타내면?

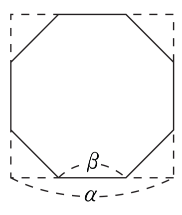
① $-a,\ -b$　② $a,\ b$　③ $-2a,\ -2b$

④ $2a,\ 2b$　⑤ $a,\ -b$

해설

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=a+b+c,\ \alpha\beta=ab$ 이것을
$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0$에 대입하면
$x^2-(a+b)x+ab=0$
$\therefore\ (x-a)(x-b)=0$ 따라서 $x=a,\ b$

49. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α, β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2}-1$

② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

③ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}-2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2}-1, \quad p = -\sqrt{2}-1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha$이므로

$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)\alpha$

α, β는 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이므로

$\alpha\beta = (\sqrt{2}-1)\alpha^2 = \sqrt{2}+1$에서

$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha > 0$이므로 $\alpha = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ p = -(\alpha+\beta) = -\left\{\alpha + (\sqrt{2}-1)\alpha\right\} = -\sqrt{2}-2$

50. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m + 5 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m의 값의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2 = X$로 놓으면
$X^2 + (m+2)X + m + 5 = 0 \cdots\cdots$①이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,
준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로
①의 두 근을 α, β라 할 때,
$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$, $\alpha+\beta = -(m+2) > 0$, $\alpha\beta = m+5 > 0$
이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는
$-5 < m < -4$