1. 모든 실수 x에 대하여 등식 $3x^2+2x+7=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 성립할 때, 상수 c의 값은?

① -6 ② -7 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

항등식이므로 우변을 전개하여 동류항끼리 비교한다.

$3x^2+2x+7=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

$a=3,\ 2a+b=2,\ a+b+c=7$

$\therefore$ 연립하면 $a=3,\ b=-4,\ c=8$

해설

조립제법 사용

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 3 & 2 & 7 \\ & & -3 & 1 \\ \hline -1 & 3 & -1 & 8 \Rightarrow c \\ & & -3 & \\ \hline & 3 & -4 & \Rightarrow b \\ & \Downarrow & & \\ & a & & \end{array}$$

2. 다항식 $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx - k$가 $x+1$로 나누어떨어지도록 상수 k의 값을 정하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

즉, $f(-1) = 0$ 이므로

$f(-1) = -1 + 3 - k - k = 0, \ \therefore \ k = 1$

3. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면
$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$
$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로
$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$
$\therefore\ a=b=2,\ c=4$
$\therefore\ abc=16$

4. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

5. 다항식 $f(x)=x^3+2x^2-x+k$가 일차식 $x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$ ② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$ ④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x)=(x-1)Q(x) \Rightarrow f(1)=0$

$\therefore f(1)=2+k=0, \quad \therefore k=-2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$=(x-1)(x+1)(x+2)$

6. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=(x-1)\{a(x-1)+b\}+c$

1	3	2		1	
		3		5	
1	3	5		6	← c
		3			
	3	8	← c		
	↑				
	a				

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$

$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$

→ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$

$\therefore\ a=3,\ b=8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지가 상수일 때, $f(x)$의 일차항의 계수는?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$f(x)=(x^2-1)(x+a)+r$ (a, r는 상수)라 하면
$f(x)=x^3+ax^2-x-a+r$
$\therefore$ 일차항의 계수는 -1

8. 다항식 $2x^{30}+2x^{28}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2x^{30}+2x^{28}-x=(x+1)Q(x)+R$
양변에 $x=-1$을 대입 하면,
$2+2+1=R \therefore R=5$
양변에 $x=1$을 대입 하면,
$2+2-1=2Q(1)+5$
$\therefore Q(1)=-1$

9. 다항식 $f(x)$를 $(3x+2)(x-4)$로 나눈 나머지가 $-2x+1$일 때, $f(x^2+3)$을 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 7 ② 4 ③ 0 ④ -4 ⑤ -7

해설

$f(x)=(3x+2)(x-4)Q(x)-2x+1\cdots①$
$f(x^3+3)=(x-1)Q'(x)+R\cdots②$
①의 양변에 $x=4$를 대입하면 $f(4)=-7$
②의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(4)=R$
$\therefore R=-7$

10. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

k	1	a	b	1
		c	d	1
	1	3	-1	2

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=-1$
④ $d=-3$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

-1	1	a	b	1
		-1	$-a+1$	$-b+a-1$
	1	$a-1$	$b-a+1$	$-b+a$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

11. 3차 이하의 다항식 $f(x)$에 대하여

$\dfrac{f(x)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{x-3}$가 성립할 때, 다음 중 d와 같은 것은? (단, a, b, c, d는 실수이다.)

① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $\dfrac{f(2)}{2}$ ④ $\dfrac{f(3)}{6}$ ⑤ 0

해설

준 식을 정리하면

$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2)$

$x = 3$일 때,

$f(3) = d \cdot 3(3-1)(3-2)$

$\therefore\ d = \dfrac{f(3)}{6}$

12. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $B(b, 1)$라 할 때, $\overline{AB}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

(ⅰ) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ y = 0$

$\therefore\ A(1, 0)$

(ⅱ) $A(1, 0), B(b, 1)$에서

$\overline{AB} = \sqrt{2}$이므로

$\overline{AB} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore\ b = 0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

13. x^{30}을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$ ② $3^{30}-1$ ③ $\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$

④ $\frac{1}{3}\left(3^{30}-1\right)$ ⑤ 0

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

양변에 $x=3$을 대입 하면, $3^{30}=R$

$x^{30}=(x-3)Q(x)+3^{30}$

양변에 $x=1$을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$

※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

14. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3　② $3x+3$　③ $3x-3$

④ $6x-9$　⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$
$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$
$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$
$a=6,\ b=-9$
$\therefore$나머지는 $6x-9$

15. 다항식 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고 $x+4$로 나누면 3이 남는다. $f(x)$를 $(x+2)^2(x+4)$로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $\frac{3}{4}(x+2)^2$ ② $\frac{3}{2}(x+2)^2$ ③ $3(x+2)^2$
④ $(x+2)(x+4)$ ⑤ $3x^2+4x+3$

해설

$f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + ax^2 + bx + c$라 놓으면 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로
$ax^2+bx+c = a(x+2)^2$
$\therefore\ f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + a(x+2)^2$
또 $f(x)$를 $(x+4)$로 나눌 때 나머지가 3이므로 $f(-4)=3$
$\therefore\ 4a = 3,\ a = \frac{3}{4}$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $\frac{3}{4}(x+2)^2$