1. 다음은 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $x^2+6x+3=0$ 을 푸는 과정이다. 연결이 옳지 <u>않은</u> 것은?

$x^2+6x=$ ㉠ x^2+6x+ ㉡ $=$ ㉠ $+$ ㉡ $(x+$ ㉢$)=$ ㉣ $x+$ ㉢ $=\pm\sqrt{㉣}$ $\therefore\ x=$ ㉤

① ㉠ : -3　② ㉡ : 9　③ ㉢ : 3

④ ㉣ : 6　⑤ ㉤ : $\pm\sqrt{6}$

해설

$x^2+6x=-3$

좌변을 완전제곱식이 되게 하는 9 를 양변에 더하면

$x^2+6x+9=-3+9$

$(x+3)^2=6$

$x+3=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ x=-3\pm\sqrt{6}$

따라서 ㉤의 연결이 옳지 않다.

2. 이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$의 두 근을 a, b라 하고 $3x^2 + 4x + 1 = 0$의 두 근을 c, d라 할 때, $a + b + c + d$의 값은?

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ 0

해설

$x^2 - x - 3 = 0$의 두 근을 구하면

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 이고,

$3x^2 + 4x + 1 = 0$ 의 두 근을 구하면

$x = \dfrac{-4 \pm 2}{6}$ 이므로

$\therefore x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2} + \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2} - \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$

3. $0 < a < b$ 이고, $(a-b+3)(a-b-2)=6$일 때, $a-b$의 값은?

① 3 ② -4 ③ -3 ④ 7 ⑤ 1

해설

$a-b=t$로 치환하면 $t^2+t-12=0$

$(t+4)(t-3)=0$

$\therefore\ t=-4$ 또는 $t=3$

$0<a<b$이므로 $t=a-b<0$

$\therefore\ a-b=-4$

4. 한 근이 다른 근의 $\frac{1}{4}$ 배인 두 근을 갖는 이차방정식 $x^2+5x+k^2-5=0$ 이 있을 때, 음의 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

이차방정식의 근을 α, $\frac{1}{4}\alpha$ 라 하면,

$\alpha+\frac{1}{4}\alpha=-5$ 이므로 $\alpha=-4$

$\alpha\times\frac{1}{4}\alpha=\frac{1}{4}\alpha^2=k^2-5, 4=k^2-5,\ k^2=9$

$\therefore k=\pm3$

$k<0$ 이므로

$\therefore k=-3$

5. 길이가 8cm 인 선분을 두 부분으로 나누어 그 각각의 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그렸더니 두 정사각형의 넓이의 비가 1 : 9가 되었다. 큰 정사각형의 한 변의 길이는?

① 2 cm ② 4 cm ③ 6 cm ④ 8 cm ⑤ 10 cm

해설

두 변의 길이를 x cm, $(8-x)$ cm라 하면

$x^2 : (8-x)^2 = 1 : 9$

$9x^2 = (8-x)^2$

$8x^2 + 16x - 64 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x-2)(x+4) = 0$

$\therefore x = 2 (\because x > 0)$

따라서 작은 변의 길이가 2 cm 이므로 큰 변의 길이는 6 cm 이다.

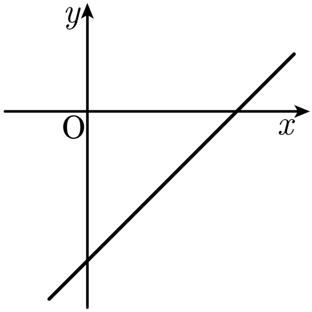
6. 이차함수 $f(x) = x^2 - 6x - 4$ 에서 $f(a) = -4$ 일 때, a 의 값을 모두 고르면?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

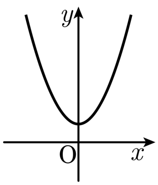
해설

$f(a) = a^2 - 6a - 4 = -4$, $a(a-6) = 0$ 이므로 $a = 0$, $a = 6$ 이다.

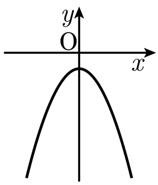
7. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 개형은?



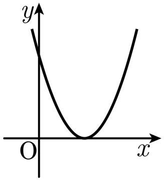
①



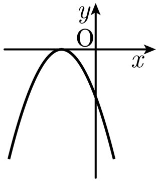
②



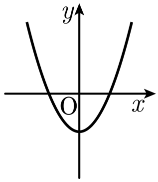
③



④



⑤



해설

$y = ax + b$ 의 그래프에서
$a > 0, b < 0$ 이다.

8. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면 $y = 2x^2 + mx + n$ 의 그래프가 된다. 이 때, $m^2 + n^2$ 의 값은?

① 36 ② 25 ③ 16 ④ 9 ⑤ 4

해설

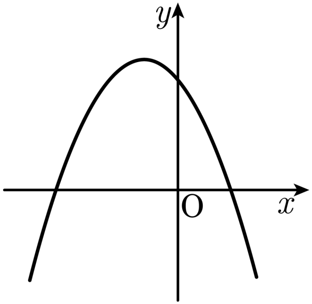
$y = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$

$y = 2(x-1+1)^2 - 1 + 3 = 2x^2 + 2$

$\therefore\ m = 0,\ n = 2$

$\therefore\ m^2 + n^2 = 0^2 + 2^2 = 4$

9. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프가 다음과 같을 때, a, p, q 의 부호는?



① $a > 0,\ p > 0,\ q > 0$　　② $a < 0,\ p < 0,\ q < 0$

③ $a > 0,\ p < 0,\ q < 0$　　④ $a < 0,\ p < 0,\ q > 0$

⑤ $a < 0,\ p > 0,\ q > 0$

해설

위로 볼록한 모양의 포물선이고, 꼭짓점의 좌표는 제 2 사분면 위에 있으므로 $a < 0,\ p < 0,\ q > 0$ 이다.

10. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 1)$ 이고, 한 점 $(0,\ -2)$ 를 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수식이 $y=a(x-p)^2+q$ 일 때, apq 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$y=ax^2+bx+c$ 의 꼭짓점이 $(-3,\ 1)$ 이므로

$y=a(x+3)^2+1$

점 $(0,\ -2)$ 를 지나므로

$-2=a(0+3)^2+1,\ a=-\dfrac{1}{3}$

$y=-\dfrac{1}{3}(x+3)^2+1$ 이다.

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{3},\ p=-3,\ q=1$ 이므로

$apq=-\dfrac{1}{3}\times(-3)\times 1=1$ 이다.

11. 이차함수 $y = -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6$ 의 최댓값을 m 이라고 할 때, m 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$y = -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6$$
$$= -2(x-a)^2 + a^2 - 6a + 6$$

최댓값 $m = a^2 - 6a + 6 = (a-3)^2 - 3$

$\therefore m$ 의 최솟값 : -3

12. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고, $x = 1$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 할 때, 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -1)$, x^2 의 계수가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 이차함수의 식은 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$ 이다.

$y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$ 을 전개하면 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ 이므로 $a = -\frac{1}{2},\ b = 1,\ c = -\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore a + b + c = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = -1$

13. 둘레의 길이가 48m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① 81m^2 ② 100m^2 ③ 121m^2

④ 144m^2 ⑤ 169m^2

해설

가로의 길이를 x m , 세로의 길이를 $(24-x)$ m , 넓이를 y m^2 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(24-x) \\ &= -x^2+24x \\ &= -(x^2-24x+144-144) \\ &= -(x-12)^2+144 \end{aligned}$$

따라서 $x=12$ 일 때 넓이의 최댓값은 $144\,\text{m}^2$ 이다.

14. 지면으로부터 15m 높이에서 초속 40m 로 쏘아 올린 모형 로켓의 x 초 후의 지면으로 부터의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x + 15$ 인 관계가 성립한다. 이 로켓이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▶ 답 : ______ m

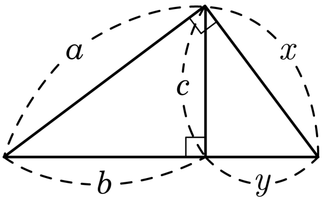
▷ 정답 : 4 초

▷ 정답 : 95 m

해설

$y = -5x^2 + 40x + 15$ 에서 $y = -5(x-4)^2 + 95$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 95 를 갖는다.

15. 다음 그림에 대해 옳은 것의 개수는?



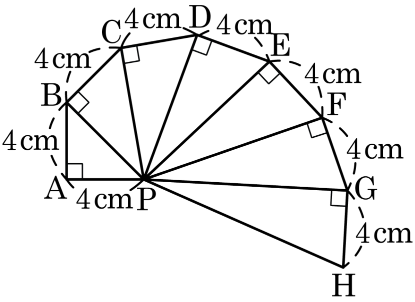
㉠ $a+y=b+x$	㉡ $b^2+c^2=a^2$
㉢ $a^2+b^2=x^2+y^2$	㉣ $x^2-c^2=y^2$
㉤ $c=\sqrt{b^2+a^2}$	

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉡ 피타고라스 정리에 따라 옳다.
㉣피타고라스 정리에 따라 $c^2+y^2=x^2$ 이므로 $x^2-c^2=y^2$ 이다.
따라서 옳은 것은 2 개이다.

16. 다음 그림에서 $\overline{PH}$ 의 길이를 구하여라.



① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

해설

$\overline{PB} = 4\sqrt{2}$, $\overline{PC} = 4\sqrt{3}$, $\overline{PD} = 4\sqrt{4}$,$\cdots$

$\therefore \overline{PH} = 4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$

17. $x^2-3x+1=0$ 일 때, $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2-3x+1=0$의 양변을 x 로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\frac{1}{x}=3$

$$x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=9-2+3=10$$

18. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 3$ 의 그래프의 축과 직선 $x = -2$는 y 축에 대해 서로 대칭일 때, $\dfrac{a^2}{b^2}$ 의 값을 구하여라. (단, $ab \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{16}$

해설

$y = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + 3 = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + 3$ 이므로 대칭축은

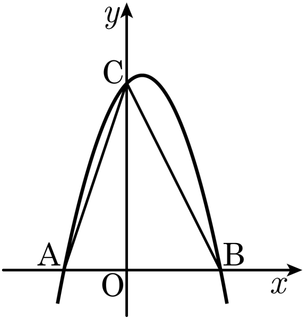
$x = -\dfrac{b}{2a}$ 이다.

이 축이 $x = -2$ 와 y 축에 대해 대칭이므로 대칭축은 $x = 2$ 이다.

$-\dfrac{b}{2a} = 2,\ \dfrac{b}{a} = -4,\ \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \dfrac{a^2}{b^2} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

19. 이차함수 $y=-x^2+x+6$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle \mathrm{ABC}$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y=-x^2+x+6$ 의 C 의 좌표 $(0,6)$

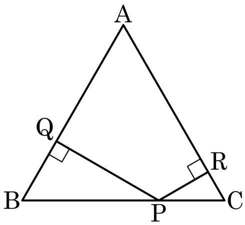
$-x^2+x+6=0$, $(x-3)(x+2)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-2$

$\mathrm{A}(-2,0), \mathrm{B}(3,0)$ 이므로

$\triangle \mathrm{ABC}$ 의 넓이는 $5\times 6\times \frac{1}{2}=15$

20. 다음 그림의 정삼각형 ABC 는 한 변의 길이가 2 cm 이고 점 P 는 변 BC 위의 임의의 점이다. 점 P 에서 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, $(\overline{PQ}+\overline{PR})^2$ 의 값을 구하여라.



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

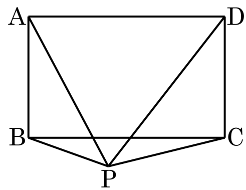
정삼각형 ABC 의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2 = \sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle ACP$

$\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{PQ} + \dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{PR},\ \overline{PQ}+\overline{PR} = \sqrt{3}$

$\therefore\ (\overline{PQ}+\overline{PR})^2 = 3$

21. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 의 외부에 잡은 한 점 P 와 사각형의 각 꼭짓점을 연결하였다. $\overline{\mathrm{PA}^2}=20$, $\overline{\mathrm{PB}^2}=5$, $\overline{\mathrm{PD}^2}=25$ 일 때, $\overline{\mathrm{PC}}$ 의 길이를 구하여라.

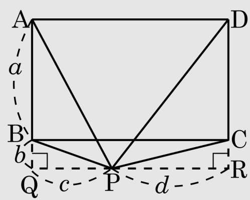


▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{10}$

해설

다음 그림과 같이
$\triangle\mathrm{AQP}$, $\triangle\mathrm{BQP}$, $\triangle\mathrm{DRP}$, $\triangle\mathrm{CRP}$ 이 직각삼각형이 되도록 점 Q 와 점 R 을 잡고,
$\overline{\mathrm{AB}}=a, \overline{\mathrm{BQ}}=b, \overline{\mathrm{PQ}}=c, \overline{\mathrm{PR}}=d$ 라 놓으면



$\triangle\mathrm{AQP}$ 에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=(a+b)^2+c^2\cdots$㉠

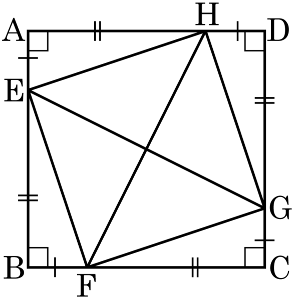
$\triangle\mathrm{BQP}$ 에서 $\overline{\mathrm{BP}}^2=b^2+c^2\cdots$㉡

$\triangle\mathrm{DRP}$ 에서 $\overline{\mathrm{PD}}^2=(a+b)^2+d^2\cdots$㉢

$\triangle\mathrm{CRP}$ 에서 $\overline{\mathrm{PC}}^2=b^2+d^2\cdots$㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2$ 이 성립함을 알 수 있다.
따라서,$20+\overline{\mathrm{PC}}^2=5+25$, $\overline{\mathrm{PC}}^2=10$
$\therefore \overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{10}\ (\because \overline{\mathrm{PC}}>0)$

22. 정사각형 ABCD 에서 $\overline{AH} = \overline{DG} = \overline{CF} = \overline{BE} = 3$, $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = 1$ 일 때, $\overline{HF}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{5}$

해설

$\triangle HAE$ 는 $\overline{AH} = 3$,$\overline{AE} = 1$ 인 직각삼각형이므로

$\overline{HE} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\overline{HF}$ 는 한 변의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 정사각형 HEFG의 대각선의 길이와 같다.

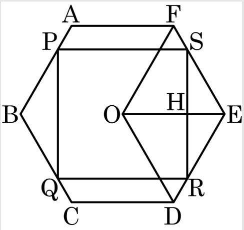
$\therefore \overline{HF} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{5}$

23. 한 변의 길이가 $\sqrt{3}+3$ 인 정육각형에 내접한 정사각형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설



위의 그림과 같이 정육각형의 대각선의 교점 O 에서 정사각형의 변 RS 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면,

$\overline{OH}=\overline{HR}=\frac{x}{2}$, $\overline{HE}=\overline{OE}-\frac{x}{2}$

또 정육각형의 한 내각의 크기는 $120°$ 이므로

$\triangle HRE$ 의 세 내각의 크기는 $30°,\ 60°,\ 90°$ 이다.

$\overline{HR}:\overline{HE}=\sqrt{3}:1$ 에서

$\overline{HR}=\sqrt{3}\overline{HE}=\sqrt{3}\left(\overline{OE}-\frac{x}{2}\right)$

$\therefore\ x=(3-\sqrt{3})\overline{OE}=(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=6$

따라서 정사각형의 넓이는 36 이다.