1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근이 아닌 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$

$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -3, -1, 1$ 또는 2

2. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$ 에서
$x=1$, $x=-1$을 대입하면 성립하므로
$x^4+x^3-7x^2-x+6$
$=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-3,\ -1,\ 1,\ 2$
따라서 최대의 근은 2

3. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$　② $x^2+5x+3=0$
③ $x^2+5x+13=0$　④ $x^2+5x-13=0$
⑤ $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a를 a',
주현이가 잘못 본 상수항 b를 b'이라 하자.
$x^2+a'x+b=0$의 두 근이 1, 3이므로
$b=1\times 3=3$
$x^2+ax+b'=0$의 두 근이 -1, -4이므로
$-a=(-1)+(-4)=-5$
$\therefore\ a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$

4. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\dfrac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $= \dfrac{c}{a} = (3-2i)(3+2i) = 9+4 = 13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.

두 근의 합$=-\dfrac{b}{a} = 2-i+2+i = 4$

$\therefore \left|\dfrac{bc}{a^2}\right| = \left|\dfrac{b}{a} \times \dfrac{c}{a}\right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

5. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 1$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$ 과 접할 때, 상수 m, n 에 대하여 $m + n$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 1$ 의 그래프와
직선 $y = mx + n$ 이 접하므로
$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = mx + n$
즉 $x^2 - (2a + m)x + a^2 - 1 - n = 0$ 에서
$D = (2a + m)^2 - 4(a^2 - 1 - n) = 0$
$\therefore\ 4ma + (m^2 + 4 + 4n) = 0$
이 식이 a 의 값에 관계없이 성립하므로
$4m = 0$, $m^2 + 4 + 4n = 0$
두 식을 연립하여 풀면 $m = 0, n = -1$
$\therefore\ m + n = -1$

6. 직선 $y=-x+1$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동 하였더니 이차함수 $y=x^2-3x$의 그래프에 접하였다. 이때, 상수 m의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선 $y=-x+1$을 x축의 방향으로
m만큼 평행이동하면
$y=-(x-m)+1=-x+m+1$
이 직선이 $y=x^2-3x$의 그래프와 접하므로
이차방정식 $x^2-3x=-x+m+1$,
즉, $x^2-2x-m-1=0$에서
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-m-1)=0$
$2+m=0 \quad \therefore m=-2$

7. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 20 인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

가로의 길이를 x, 세로의 길이를 $20-x$라고 하자.

$y = x \times (20 - x)$
$= -x^2 + 20x$
$= -(x^2 - 20x)$
$= -(x - 10)^2 + 100$

따라서 100이 최댓값이다.

8. 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm
② 가로 7 cm, 세로 7 cm
③ 가로 8 cm, 세로 9 cm
④ 가로 8 cm, 세로 8 cm
⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

해설

가로의 길이를 x cm , 세로의 길이를 $(14-x)$ cm , 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라 하면

$y = x(14-x)$
$\quad = -x^2 + 14x$
$\quad = -(x^2 - 14x + 49 - 49)$
$\quad = -(x-7)^2 + 49$

따라서 $x = 7$, 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 $49\,\mathrm{cm}^2$ 를 가진다

9. 두 복소수 $z_1 = a + (3b-1)i$, $z_2 = (b+1) - 5i$에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$가 성립할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$a + (3b-1)i = (b+1) + 5i$에서

$\begin{cases} a = b+1 \\ 3b-1 = 5 \end{cases}$ 이므로 연립하면

$a = 3,\ b = 2$

$\therefore\ a+b = 5$

10. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$$

① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$ ② $z = 2 \pm \sqrt{3}i$ ③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$
④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$ ⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$z = a + bi$
$z + \bar{z} = 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7$
$\therefore a = 2, b = \pm\sqrt{3}$
$\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}i$

11. $z = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때 $z^5 + 3z$ 를 간단히 하면?

① $1+\sqrt{3}i$ ② $2+\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$
④ $2+2\sqrt{3}i$ ⑤ $3+3\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 에서 $z^2 - z + 1 = 0 \ \therefore\ z^3 = -1$

$z^5 + 3z = -z^2 + 3z = -(z-1) + 3z = 1 + 2z$

$z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이므로 $1 + 2z = 2 + \sqrt{3}i$

12. 복소수 $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 = -2i,\ z^3 = -2-2i$

$\therefore\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5$

$= (-2i-2) - 2(-2i) + 2(1-i) + 5$

$= 5$

해설

$$\begin{aligned} z = 1 - i \quad &\Rightarrow \quad z - 1 = -i \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$

13. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$　　② $1 \le k \le \frac{5}{4}$　　③ $-5<k<-\frac{5}{4}$

④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$　　⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

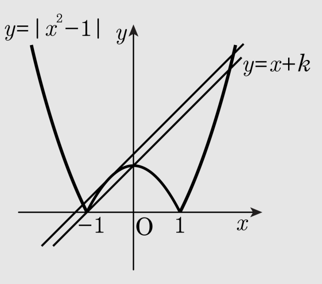
해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0$　　$\therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k$　　$\therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

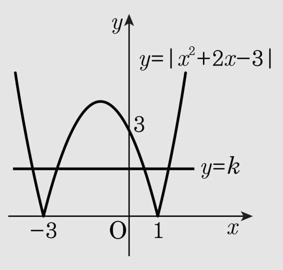
14. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$ ② $k > 4$ ③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$ ⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은
두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의
그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$



15. 실수 x, y가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$　　② $2\sqrt{2} + 1$　　③ $2\sqrt{2} + 2$
④ $\sqrt{2} + 4$　　⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을
(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$에서 x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore\ -2 \leq y \leq 2$
따라서, y의 최댓값은 2이다.
(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$에서 y가 실수이므로
$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0,\ x^2 \leq 8$
$\therefore\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.
(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

16. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면
$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$
$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$
x가 실수이므로 실근이다.
따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$
$3k^2-22k+15\leq 0$
$\therefore\ \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$
k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면
$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서
$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

17. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

18. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$에서 $x = 1, x = -1$일 때 성립하므로
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + a) = 0$
따라서 모두 실근이 되려면
$x^2 + 2x + a = 0$의 $\dfrac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로
$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$
따라서 a의 최댓값은 1이다.

19. $x^2+x+1=0$일 때 $\dfrac{x^{10}+1}{x^2}$의 값을 구하여라?

① 1 ② 2 ③ 0 ④ -2 ⑤ -1

해설

$x^2+x+1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0 \Rightarrow \dfrac{x^{10}+1}{x^2}$

$=\dfrac{(x^3)^3x+1}{x^2}$

$=\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{-x^2}{x^2}$

$=-1$

$(\because\ x^2+x+1=0)$

20. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 하고, $z = \dfrac{2\alpha + 1}{\alpha + 2}$이라 할 때, $4z \cdot \overline{z}$의 값을 구하면? (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 13

해설

$x^3 = 8$에서 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$
$x^2+2x+4=0$의 한 허근을 α라 하면
다른 허근은 $\overline{\alpha}$이므로
$\alpha + \overline{\alpha} = -2,\ \alpha\overline{\alpha} = 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ 4z\overline{z} &= 4 \times \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} \times \frac{2\overline{\alpha}+1}{\overline{\alpha}+2} \\ &= 4 \times \frac{4\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 1}{\alpha\overline{\alpha} + 2(\alpha+\overline{\alpha}) + 4} \\ &= 4 \times \frac{4\times 4 + 2(-2) + 1}{4 + 2(-2) + 4} = 13 \end{aligned}$$

21. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 4개
④ 8개　　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$
$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$
여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$
(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,
$xy = 1,\ x = y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$
(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면
$xy = -1,\ x = -y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$
(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

22. $xy = 2,\ xz = 4,\ yz = 8$ 일 때, $x + y + z$의 값을 구하여라. (단, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

세 식을 곱하면 $x^2y^2z^2 = 64$이므로 $xyz = 8$
$xy = 2$에서 $z = 4$
$xz = 4$에서 $y = 2$
$yz = 8$에서 $x = 1$
$\therefore x + y + z = 1 + 2 + 4 = 7$

23. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 정수 일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

$x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자

$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 3 \rightarrow \ \alpha + \beta + 3 = \alpha\beta$

$\alpha\beta - \alpha - \beta = 3$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$ α, β 는 정수이므로

$1 \times 4 \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 5, \quad k = 7$

$2 \times 2 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 3, \quad k = 6$

$-1 \times -4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -3, \quad k = -3$

$-2 \times -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \quad k = -2$

$\therefore\ 7 + 6 - 3 - 2 = 8$

24. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots ① \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore\ (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$