

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^4 - 16 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

$$\therefore \text{모든 해의 합은 } (-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$$

2. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 치환하면

$t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$

$\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$

$\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

3. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, \quad -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

4. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

5. $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근이 α, β 이다. $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 2$ 일 때 $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$ 이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

6. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 b 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 를 얻었고, c 를 잘못 보아 $-1, 4$ 의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b 를 잘못 본 경우

a 와 c 는 옳으므로 두 근의 곱은

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 2a$$

(ii) c 를 잘못 본 경우

a 와 b 는 옳으므로 두 근의 합은

$$-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = -3a$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식은

$$ax^2 - 3ax + 2a = 0$$

$a \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서 근의 합은 3이다.

7. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 두 직선 $y = -2x + 1$, $y = 4x - 2$ 에 동시에 접할 때, 상수 a, b 의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$y = x^2 + ax + b \cdots \text{㉠}$$

$$y = -2x + 1 \cdots \text{㉡}$$

$$y = 4x - 2 \cdots \text{㉢}$$

㉠과 ㉡이 접하므로 $x^2 + ax + b = -2x + 1$

즉, $x^2 + (a + 2)x + b - 1 = 0$ 에서

$$D = (a + 2)^2 - 4(b - 1) = 0$$

$$\therefore a^2 + 4a - 4b + 8 = 0 \cdots \text{㉣}$$

㉠과 ㉢이 접하므로 $x^2 + ax + b = 4x - 2$

즉, $x^2 + (a - 4)x + b + 2 = 0$ 에서

$$D = (a - 4)^2 - 4(b + 2) = 0$$

$$\therefore a^2 - 8a - 4b + 8 = 0 \cdots \text{㉤}$$

㉣과 ㉤을 연립하여 풀면 $a = 0, b = 2$

$$\therefore a + b = 2$$

8. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$$

이므로 $x = -a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.

$$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$$

따라서 M 은 $a = -2$ 일 때 최댓값 -8 을 가진다.

9. x, y, z 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} &4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9 \end{aligned}$$

x, y, z 는 실수이므로

$$(x - 2)^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는

$x - 2 = 0, y = 0, z = 0$ 일 때,

최댓값 9를 갖는다.

10. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle AOB$ 의 넓이는 얼마인가?

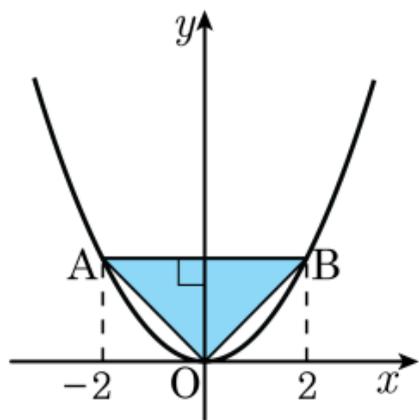
① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10



해설

$\overline{AB} = 4$ 이고,

$x = 2$ 를 대입하면 $y = 2$ 이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

11. 지면으로부터 초속 30m 로 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = 30t - 5t^2$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는?

① 60m

② 55m

③ 50m

④ 45m

⑤ 40m

해설

$$\begin{aligned}h &= 30t - 5t^2 \\ &= -5(t^2 - 6t + 9) + 45 \\ &= -5(t - 3)^2 + 45\end{aligned}$$

12. 연립방정식 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ± 1

② ± 3

③ ± 5

④ ± 7

⑤ ± 9

해설

$$\begin{cases} 2x + y = k & \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $y = k - 2x$ 를 ②에 대입하면

$$x^2 + (k - 2x)^2 = 5$$

$5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0$ 이 중근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 5(k^2 - 5) = 0$$

$$-k^2 + 25 = 0, k^2 = 25$$

$$\therefore k \pm 5$$

13. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)와 그 켤레복소수 \bar{z} 에 대하여 $z + \bar{z} = 4$, $z\bar{z} = 5$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$z + \bar{z} = 2a = 4, \quad a = 2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 5, \quad b^2 = 1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$$

14. $x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2 - 2x$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ i

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$, $3x - 1 = -\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$$9x^2 - 6x + 1 = -2, \quad 9x^2 - 6x = -3$$

양변을 3으로 나누면

$$\therefore 3x^2 - 2x = -1$$

15. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 + (2k+1)x + 6 = 0$ 의 해가 2, α 일 때, $k + \alpha$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

해가 2, α 라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$$

$$4k + 4k + 8 = 0 \text{에서 } k = -1$$

$k = -1$ 을 방정식에 대입하고 α 를 구한다.

$$-x^2 - x + 6 = 0, x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0, x = 2, -3$$

$$\therefore k = -1, \alpha = -3$$

$$\therefore k + \alpha = -4$$

16. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$

② $a > 1$

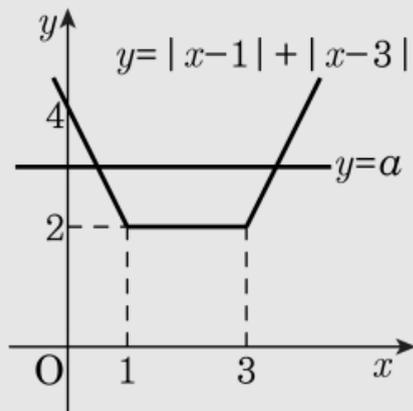
③ $a < 2$

④ $a > 2$

⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



17. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

18. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x\%$ 감소한다고 한다. 이 때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

원래의 상품 1개당 판매 가격을 a 원, 판매량을 b 개라 하자.
가격을 $x\%$ 올리면 상품 1개당 판매 가격이

$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, 판매량이 $b\left(1 - \frac{2x}{300}\right)$ 개이므로

판매 금액은

$$\begin{aligned} & ab\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{2x}{300}\right) \\ &= ab \cdot \frac{100+x}{100} \cdot \frac{300-2x}{300} \\ &= \frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x) \\ &= \frac{ab}{30000}(-2x^2 + 100x + 30000) \\ &= \frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2 + 31250\} \end{aligned}$$

따라서 $x = 25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

19. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 - 8x + 4b = 0$ 이 중근 $x = 2$ 를 갖도록 상수 a, b 의 값으로 알맞게 짝지어진 것은?

① $a = -1, b = 1$

② $a = 0, b = 2$

③ $a = -1, b = 3$

④ $a = 0, b = 4$

⑤ $a = -2, b = 5$

해설

삼차방정식이 $x = 2$ 를 근으로 가지므로 x 에 2를 대입하면

$$8 + 4a - 16 + 4b = 0, a = 2 - b$$

$$\therefore x^3 + ax^2 - 8x + 4b = x^3 + (2 - b)x^2 - 8x + 4b$$

$$= (x - 2) \{x^2 + (4 - b)x - 2b\}$$

위의 식에서 $x = 2$ 가 중근이라고 했으므로 이차식의 하나의 근도 2가 된다.

따라서 이차식에 $x = 2$ 를 대입하면 0이 되므로

$$4 + 8 - 2b - 2b = 0$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

20. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르시오.

보기

㉠ $(1 + \omega^2)^3 = -1$

㉡ $(1 + \omega)^{10} = \omega^2$

㉢ 모든 자연수 n 에 대하여 $(1 + \omega)^{3n} = (-1)^n$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\text{㉠ } \omega^2 + 1 = -\omega,$$

$$(\omega^2 + 1)^3 = (-\omega)^3 = -\omega^3 = -1(\text{○})$$

$$\text{㉡ } (1 + \omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$$

$$= \omega^{20} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 = \omega^2(\text{○})$$

$$\text{㉢ } (-\omega^2)^{3n} = (-1)^{3n} \cdot (\omega^3)^{2n}$$

$$= (-1)^n \cdot 1^{2n} = (-1)^n$$

$$(\because (-1)^{3n} = \{(-1)^3\}^n = (-1)^n) (\text{○})$$

\therefore ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참

21. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$a = bc, b = ca, c = ab,$$

$$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$$

$$abc \neq 0, abc = 1,$$

$$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$$

$$a = \pm 1, b = \pm 1, c = \pm 1$$

그러나 $abc = 1$ 이므로, a, b, c 중에서 -1 인 것은 없거나 2개이다.

$$\therefore (a, b, c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

22. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$