1. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ ② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ ④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x-2)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2-1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x-3)(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2+4)(x^2-4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \dfrac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

2. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25　② 20　③ 10　④ 7　⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

3. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서

$x^2 = t$로 치환하면

$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

4. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

5. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3-ax-3=0$의 세 근일 때, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3-ax^2+1=0$　　② $x^3-ax-3=0$

③ $3x^3+ax^2+1=0$　　④ $x^3+ax+3=0$

⑤ $3x^3-ax^2-1=0$

해설

x^3-ax-3

$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=0$,

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-a,\ \alpha\beta\gamma=3$

$\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}=-\frac{\gamma}{\gamma^2}=-\frac{1}{\gamma}$,

$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}=-\frac{\alpha}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha}$,

$\frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}=-\frac{\beta}{\beta^2}=-\frac{1}{\beta}$

따라서, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2},\ \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2},\ \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를

세 근으로 하는 방정식은

$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)\left(x+\frac{1}{\gamma}\right)$

$=x^3+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2$

$+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$=x^3+\left(-\frac{a}{3}\right)x^2+\frac{1}{3}=0$

$\therefore\ 3x^3-ax^2+1=0$

6. $\begin{cases} x^2 - (y+1)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ 의 해가 $x = \alpha,\ y = \beta$일 때, $\alpha + \beta$의 값이 될 수 있는 것은?

① -10　② -7　③ -3　④ 0　⑤ 5

해설

$\begin{cases} x^2 - (y+1)^2 = 0 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡식 $x^2 = 25 - y^2$을
㉠식에 대입하면
$25 - y^2 - (y+1)^2 = 0$
$25 - y^2 - (y^2 + 2y + 1) = 0$
$-2y^2 - 2y + 24 = 0,\ y^2 + y - 12 = 0,$
$(y+4)(y-3) = 0,$
$\therefore\ y = -4,\ 3$
ⅰ) $y = -4, x = \pm 3$
$\rightarrow \alpha + \beta = 3 - 4 = 1, -3 - 4 = -7$
ⅱ) $y = 3, x = \pm 4$
$\rightarrow \alpha + \beta = 4 + 3 = 7, -4 + 3 = -1$

7. x, y가 자연수일 때, 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(4,\ 4)$

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 32 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(2x - y)(x - y) = 0$

$\therefore\ y = x$ 또는 $y = 2x$

$y = x$를 ②에 대입하면 $2x^2 = 32$

$\therefore\ x = \pm 4,\ y = \pm 4$

$y = 2x$를 ②에 대입하면 $5x^2 = 32$

$\therefore\ x = \pm\dfrac{4\sqrt{10}}{5},\ y = \pm\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$

x, y는 자연수이므로 구한 해는

$\therefore\ x = 4,\ y = 4$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy + 3y^2 = 1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$ 의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$ ② $-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$ ③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$ ⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8에서 $x^2 - 11xy - 26y^2 = 0,\ (x+2y)(x-13y) = 0$
$x + 2y = 0 \cdots\cdots$ ㉢
$x - 13y = 0 \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $y^2 = 1$
$\therefore\ y = \pm 1,\ x = \mp 2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2 = 1$
$\therefore\ y = \pm\frac{1}{4},\ x = \pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x + y = -1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

9. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

10. 방정식 $x^2 + 2(k+a)x + k^2 + k + b = 0$이 k의 값에 관계없이 중근을 갖도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a + 2b$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

준식에서 $\frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + k + b)$

$= (2a-1)k + a^2 - b = 0$

이것이 k에 대한 항등식이 되어야 하므로

$2a - 1 = 0, \quad a^2 - b = 0$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$

$\therefore\ a + 2b = 1$

11. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2 = \overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$
변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$
$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$
$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$
$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$
한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다
㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$
㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$
㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면
$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

12. x에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$의 한근이 $1 + \sqrt{5}$일 때, a의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

다른 한 근을 α라 하면
두 근의 곱은 $(1 + \sqrt{5})\alpha = 4$
따라서 $\alpha = -1 + \sqrt{5}$
$\therefore$두 근의 합은 $(1 + \sqrt{5}) + (-1 + \sqrt{5}) = a$
$\therefore a = 2\sqrt{5}$

13. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1\pm\sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2+bx+c=0$라 하면
$-\frac{b}{a'}=1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}=2$,
$\frac{c}{a'}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$이므로
갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2-2x-5=0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면
$-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, $\frac{c'}{a}=-\frac{1}{3}$으로
$3x^2-2x-1=0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a=3$, $c=-5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.
따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

14. 직선 $y = mx - 4$가 이차함수 $y = 2x^2 - 3$ 의 그래프에 접하도록 하는 양수 m의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x^2 - 3 = mx - 4$, 즉 $2x^2 - mx + 1 = 0$이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$

$m^2 - 8 = 0$, $m^2 = 8$

$\therefore m = 2\sqrt{2}(\because m > 0)$

15. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - mx - m + 2$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값과 그 때의 m 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 : $\frac{5}{2}$, $m = -1$

해설

$y = \frac{1}{2}x^2 - mx - m + 2 = \frac{1}{2}(x-m)^2 - \frac{1}{2}m^2 - m + 2$

$\therefore f(m) = -\frac{1}{2}m^2 - m + 2 = -\frac{1}{2}(m+1)^2 + \frac{5}{2}$

따라서 $m = -1$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{2}$ 을 갖는다.

16. x, y 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$
$=2(x^2-4x)+(y^2+2y)+6$
$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$
x, y 는 실수이므로 $(x-2)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$
$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6 \geq -3$
따라서, $x=2$, $y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

17. 가로의 길이가 10m , 세로의 길이가 8m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로의 길이를 xm 만큼 줄이고, 세로의 길이를 xm 만큼 늘여서 새로운 밭을 만들려고 한다. 새로운 밭의 넓이를 최대로 하려고 할 때, x 의 값과 밭의 최대 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답: ______ cm^2

▷ 정답: $x = 1$

▷ 정답: 최대 넓이: 81 cm^2

해설

$y = (10 - x)(8 + x)$
$= -x^2 + 2x + 80$
$= -(x - 1)^2 + 81$

따라서 $x = 1$ 일 때, 최댓값 81 m^2를 갖는다.

18. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, x 초 후의 축구공의 높이를 ym 라고 하면 $y = -x^2 + 6x$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ____ m

▷ 정답 : 9 m

해설

$y = -x^2 + 6x$ 에서 $y = -(x-3)^2 + 9$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 9m 이다.

19. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$이므로
켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$
$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$
$\therefore p=-4$
$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$
$\therefore q=6$
$\therefore\ p+q=-4+6=2$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 $k_1,\ k_2$ 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

21. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$　　② $z=4-3i$　　③ $z=6-3i$
④ $z=2+3i$　　⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi) \\
&= (6-2a-2b)+(2a+4b)i
\end{aligned}
$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

22. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$　② $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$　③ $\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3}i)$
④ $\frac{7}{2}(3\pm\sqrt{3}i)$　⑤ $\frac{9}{2}(4\pm\sqrt{3}i)$

해설

$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\
&= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\
&= 3x \\
&= \frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)
\end{aligned}
$$

23. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

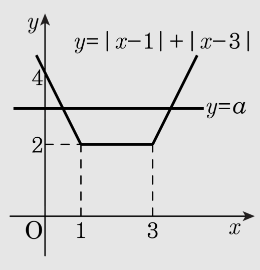
24. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



25. x가 실수일 때 $\frac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\frac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

$\therefore \frac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\frac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

26. 두 포물선 $C_1 : y = x^2 - 10x + 7$, $C_2 : y = -x^2 + 6x + 7$이 두 점 A, B에서 만난다. y축에 평행하고 두 점 A, B사이를 지나는 직선을 그어 두 포물선 C_1, C_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 APBQ의 넓이의 최댓값은?

① 128　② 130　③ 132　④ 134　⑤ 136

해설

두 점 A, B에서 직선 PQ에 내린 수선의 발까지의 길이를 각각 h_1, h_2라 하면

$\square\mathrm{APBQ} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)\overline{\mathrm{PQ}}$ 이고

$h_1 + h_2$ 의 값은 두 점 A, B 의 x 좌표의 차와 같다.

두 점 A, B 의 x 좌표는 두 포물선의 교점의 x 좌표이므로

$x^2 - 10x + 7 = -x^2 + 6x + 7$ 에서

$x^2 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ 또는 $x = -8$

$\therefore h_1 + h_2 = 8$

점 P 의 좌표를 k라 하면 선분 PQ의 길이는

$(-k^2 + 6k + 7) - (k^2 - 10k + 7) = -2k^2 + 16k$

$= -2(k-4)^2 + 32$

따라서, 사각형 APBQ 의 넓이의 최댓값은

$\overline{\mathrm{PQ}} = 32$ 일 때이므로

$\square\mathrm{APBQ} = \frac{1}{2} \times 8 \times 32 = 128$

27. $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$의 두 근이 $1 + i,\ 1 - i$일 때, 이 방정식의 나머지 두 근을 구하면?

① $x = -\dfrac{-1 + - \sqrt{3}i}{2}$　　② $x = \dfrac{1 + - \sqrt{3}i}{2}$

③ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$　　④ $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$의 두근이 $1 + i,\ 1 - i$이므로
$x^2 - 2x + 2$는 $x^4 - x^3 + x^2 + 2$의 인수이다.
따라서,
$\therefore x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1)$
$\therefore x^2 + x + 1 = 0$일 때의 근은 $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

28. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
w^3 = 1 \Rightarrow &\quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \\
\Rightarrow &\quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1
\end{aligned}
$$

$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$

$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$

$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$

29. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 4개
④ 8개　　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$
$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$
여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$
(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,
$xy = 1,\ x = y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$
(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면
$xy = -1\ ,\ x = -y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$
(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

30. 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k+1=0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \geq \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-(k+1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=2k+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① × 2 + ②을 하면 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=-1$

$\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=3,\quad (\alpha+2)(\beta+2)=3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha+2,\ \beta+2)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k=-(\alpha+\beta+1)$ 이므로 $k=-1,\ 7$

$k>0$ 이므로 $k=7$