1. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ ② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ ④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x-2)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2-1)(x^2+2)=0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x-3)(x+4)(x-2)=0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2+4)(x^2-4)=0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \dfrac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

2. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25　② 20　③ 10　④ 7　⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

3. 사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4+3x^2-10=0$에서

$x^2=t$로 치환하면

$t^2+3t-10=0$, $(t+5)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

4. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$ (나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$
② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$
③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$
⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

5. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3 - ax - 3 = 0$의 세 근일 때, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3 - ax^2 + 1 = 0$

② $x^3 - ax - 3 = 0$

③ $3x^3 + ax^2 + 1 = 0$

④ $x^3 + ax + 3 = 0$

⑤ $3x^3 - ax^2 - 1 = 0$

해설

$x^3 - ax - 3$

$= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$= 0$에서

$\alpha + \beta + \gamma = 0,$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a, \ \alpha\beta\gamma = 3$

$\therefore \ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma},$

$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha},$

$\frac{\alpha+\gamma}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta}$

따라서, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \ \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \ \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를

세 근으로 하는 방정식은

$\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\left(x + \frac{1}{\beta}\right)\left(x + \frac{1}{\gamma}\right)$

$= x^3 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2$

$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$= x^3 + \left(-\frac{a}{3}\right)x^2 + \frac{1}{3} = 0$

$\therefore \ 3x^3 - ax^2 + 1 = 0$

6. $\begin{cases} x^2-(y+1)^2=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은?

① -10　　② -7　　③ -3　　④ 0　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} x^2-(y+1)^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡식 $x^2=25-y^2$을

㉠식에 대입하면

$25-y^2-(y+1)^2=0$

$25-y^2-(y^2+2y+1)=0$

$-2y^2-2y+24=0,\ y^2+y-12=0,$

$(y+4)(y-3)=0,$

$\therefore\ y=-4,\ 3$

ⅰ) $y=-4, x=\pm3$

$\rightarrow \alpha+\beta=3-4=1, -3-4=-7$

ⅱ) $y=3, x=\pm4$

$\rightarrow \alpha+\beta=4+3=7, -4+3=-1$

7. x, y가 자연수일 때, 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(4,\ 4)$

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 32 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(2x-y)(x-y) = 0$

$\therefore\ y = x$ 또는 $y = 2x$

$y = x$를 ②에 대입하면 $2x^2 = 32$

$\therefore\ x = \pm 4,\ y = \pm 4$

$y = 2x$를 ②에 대입하면 $5x^2 = 32$

$\therefore\ x = \pm\dfrac{4\sqrt{10}}{5},\ y = \pm\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$

x, y는 자연수이므로 구한 해는

$\therefore\ x = 4,\ y = 4$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy + 3y^2 = 1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ ③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2}, 1$ ⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8에서 $x^2 - 11xy - 26y^2 = 0$, $(x+2y)(x-13y) = 0$

$x + 2y = 0 \cdots\cdots$ ㉢

$x - 13y = 0 \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉢에서 $y^2 = 1$

$\therefore\ y = \pm 1,\ x = \mp 2$(복호동순)

㉡, ㉣에서 $16y^2 = 1$

$\therefore\ y = \pm\frac{1}{4},\ x = \pm\frac{13}{4}$(복호동순)

$\therefore\ x + y = -1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

9. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$$a^2-2a+\frac{3}{a^2+1}=a-1+\frac{3}{3a}=a+\frac{1}{a}-1$$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$$a-3+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\frac{1}{a}=3$$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

10. 방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+k+b=0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식에서 $\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+k+b)$

$=(2a-1)k+a^2-b=0$

이것이 k 에 대한 항등식이 되어야 하므로

$2a-1=0, \quad a^2-b=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}, \quad b=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a+2b=1$

11. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2 = \overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore \ a = b = c$

$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

12. x에 대한 2차 방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$의 한근이 $1 + \sqrt{5}$일 때, a의 값은?

① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

다른 한 근을 α라 하면
두 근의 곱은 $(1+\sqrt{5})\alpha = 4$
따라서 $\alpha = -1 + \sqrt{5}$
$\therefore$두 근의 합은 $(1+\sqrt{5}) + (-1+\sqrt{5}) = a$
$\therefore a = 2\sqrt{5}$

13. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1 \pm \sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2 + bx + c = 0$라 하면
$-\frac{b}{a'} = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 2$,
$\frac{c}{a'} = (1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = -5$이므로
갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2 - 2x - 5 = 0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면
$-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \frac{c'}{a} = -\frac{1}{3}$으로
$3x^2 - 2x - 1 = 0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a = 3,\ c = -5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.
따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

14. 직선 $y = mx - 4$가 이차함수 $y = 2x^2 - 3$의 그래프에 접하도록 하는 양수 m의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x^2 - 3 = mx - 4$, 즉 $2x^2 - mx + 1 = 0$이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$

$m^2 - 8 = 0,\ m^2 = 8$

$\therefore m = 2\sqrt{2}(\because m > 0)$

15. 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-mx-m+2$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값과 그 때의 m 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 최댓값 : $\frac{5}{2}$, $m=-1$

해설

$$y=\frac{1}{2}x^2-mx-m+2=\frac{1}{2}(x-m)^2-\frac{1}{2}m^2-m+2$$

$$\therefore f(m)=-\frac{1}{2}m^2-m+2=-\frac{1}{2}(m+1)^2+\frac{5}{2}$$

따라서 $m=-1$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{2}$ 을 갖는다.

16. $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$

$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$

$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$

$x,\ y$ 는 실수이므로 $(x-2)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$

$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\geq -3$

따라서, $x=2,\ y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

17. 가로의 길이가 10m , 세로의 길이가 8m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로의 길이를 xm 만큼 줄이고, 세로의 길이를 xm 만큼 늘여서 새로운 밭을 만들려고 한다. 새로운 밭의 넓이를 최대로 하려고 할 때, x 의 값과 밭의 최대 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 : $\underline{\quad\quad\quad}$ cm^2

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : 최대 넓이 : 81 cm^2

해설

$$y = (10 - x)(8 + x)$$
$$= -x^2 + 2x + 80$$
$$= -(x - 1)^2 + 81$$

따라서 $x = 1$ 일 때, 최댓값 81 m^2 를 갖는다.

18. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, x 초 후의 축구공의 높이를 ym 라고 하면 $y = -x^2 + 6x$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 9 m

해설

$y = -x^2 + 6x$ 에서 $y = -(x-3)^2 + 9$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 9m 이다.

19. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$이므로
켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$
$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$
$\therefore p=-4$
$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$
$\therefore q=6$
$\therefore\ p+q=-4+6=2$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

21. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$

④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi) \\
&= (6-2a-2b)+(2a+4b)i
\end{aligned}
$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

22. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ② $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ③ $\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3}i)$

④ $\frac{7}{2}(3\pm\sqrt{3}i)$ ⑤ $\frac{9}{2}(4\pm\sqrt{3}i)$

해설

$$x+\frac{1}{x}=1 \;\Rightarrow\; x^2-x+1=0 \;\therefore\; x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\
&= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\
&= 3x \\
&= \frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)
\end{aligned}$$

23. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

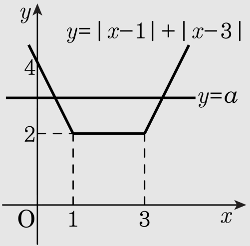
24. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



25. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

$\therefore\ \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

26. 두 포물선 $C_1 : y = x^2 - 10x + 7$, $C_2 : y = -x^2 + 6x + 7$이 두 점 A, B에서 만난다. y축에 평행하고 두 점 A, B사이를 지나는 직선을 그어 두 포물선 C_1, C_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 APBQ의 넓이의 최댓값은?

① 128 ② 130 ③ 132 ④ 134 ⑤ 136

해설

두 점 A, B에서 직선 PQ에 내린 수선의 발까지의 길이를 각각 h_1, h_2라 하면

$\square\mathrm{APBQ} = \dfrac{1}{2}(h_1 + h_2)\overline{\mathrm{PQ}}$ 이고

$h_1 + h_2$ 의 값은 두 점 A, B 의 x 좌표의 차와 같다.
두 점 A, B 의 x 좌표는 두 포물선의 교점의 x 좌표이므로
$x^2 - 10x + 7 = -x^2 + 6x + 7$ 에서
$x^2 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ 또는 $x = -8$
$\therefore h_1 + h_2 = 8$
점 P 의 좌표를 k라 하면 선분 PQ의 길이는
$(-k^2 + 6k + 7) - (k^2 - 10k + 7) = -2k^2 + 16k$
$= -2(k - 4)^2 + 32$
따라서, 사각형 APBQ 의 넓이의 최댓값은
$\overline{\mathrm{PQ}} = 32$ 일 때이므로

$\square\mathrm{APBQ} = \dfrac{1}{2} \times 8 \times 32 = 128$

27. $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$의 두 근이 $1+i$, $1-i$일 때, 이 방정식의 나머지 두 근을 구하면?

① $x = -\dfrac{-1 + -\sqrt{3}i}{2}$

② $x = \dfrac{1 + -\sqrt{3}i}{2}$

③ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

④ $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$의 두근이 $1+i$, $1-i$이므로
$x^2 - 2x + 2$는 $x^4 - x^3 + x^2 + 2$의 인수이다.
따라서,
$\therefore x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1)$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$일 때의 근은 $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

28. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$$
$$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$$
$$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$$

29. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개

④ 8개 ⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$

(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy = 1,\ x = y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$

(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy = -1\ ,\ x = -y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

30. 이차방정식 $x^2 + (k+1)x + 2k + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \geq \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(k+1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta = 2k+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$① \times 2 + ②$을 하면 $\alpha\beta + 2(\alpha+\beta) = -1$

$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = 3,\quad (\alpha+2)(\beta+2) = 3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha+2,\ \beta+2) = (3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta) = (1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k = -(\alpha+\beta+1)$ 이므로 $k = -1,\ 7$

$k > 0$ 이므로 $k = 7$