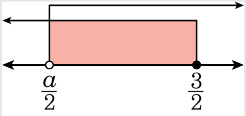
1. 연립부등식 $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{2} \\ 2x > a \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수가 5개일 때, a 의 값의 범위는?

① $a > -6$　② $-8 < a \le -6$　③ $a < -8$

④ $-8 \le a < -6$　⑤ $-8 \le a \le -6$

해설

x 의 범위가 그림과 같을 때 5 개의 정수해를 갖는다.



$-4 \le \dfrac{a}{2} < -3$ 양변에 2 을 곱하면 $-8 \le a < -6$

2. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 3 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 3x+13 \leq -2 \\ 8-2x \leq a \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 22 , 23

해설

$3x+13 \leq -2$

$3x \leq -15$

$x \leq -5$

$8-2x \leq a$

$-2x \leq a-8$

$x \geq \dfrac{8-a}{2}$

만족하는 정수는 -5 , -6 , -7 이다.

$\therefore -8 < \dfrac{8-a}{2} \leq -7$

$-16 < 8-a \leq -14$

$22 \leq a < 24$

$\therefore \ a = 22,\ 23$

3. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는

$m \geq -2$

$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로

$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$

따라서 $-2 \leq m < 2$이므로

만족하는 정수 m의 개수는

$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개

4. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \leq 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \leq k \leq 0$

② $-2 < k < 0$

③ $0 \leq x \leq 2$

④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0$, 또는$k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0, \quad k(k-2) < 0$$

$\therefore 0 < k < 2$

5. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$의 해가 $2 < x < 3$일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로

$(x-2)(x-3) < 0$

$x^2 - 5x + 6 < 0,\ a = -5, b = 6$

$\therefore\ a + b = 1$

6. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$(x+4)(x-2) < 0$

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$

$\therefore a = -8$

7. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 \le 0 \end{cases}$ 의 해를 바르게 구한 것을 고르면?

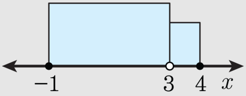
① $-1 \le x < 4$　　② $3 < x \le 4$

③ $-1 \le x < 3$　　④ $-1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$

⑤ 해가 없다

해설

$$\begin{cases} (x-3)^2 > 0 & : \ x \ne 3\text{인 모든 실수} \\ (x-4)(x+1) \le 0 & : \ -1 \le x \le 4 \end{cases}$$



$\therefore\ -1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \le 0 \\ 2x^2 - 5x < 3 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2 - 4x - 5 \le 0 \iff (x+1)(x-5) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2 - 5x < 3 \iff 2x^2 - 5x - 3 < 0$

$\iff (2x+1)(x-3) < 0$

$\therefore -\frac{1}{2} < x < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{2} < x < 3$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3개다.

9. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\quad \dfrac{3+\beta}{4}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

10. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$
$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로
$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은
$x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ \dfrac{\beta+1}{4}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$
$f(4x-1)=0$에서
$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ x=\dfrac{\beta+1}{4},$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

11. 이차함수 $y = 6x^2 + ax + b$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$일 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

해설

이차부등식 $6x^2 + ax + b < 0$의 해가 $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$

이므로 $\frac{1}{3}, \frac{5}{2}$는 이차방정식 $6x^2 + ax + b = 0$의

두 실근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{3} + \frac{5}{2} = -\frac{a}{6}$에서 $a = -17$

$\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{b}{6}$에서 $b = 5$

$\therefore\ a + b = -12$

12. 이차함수 $y = x^2 + 2x + 4$ 의 그래프가 직선 $y = 3x + 10$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $x < a$ 또는 $x > b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은? (단, $a < b$ 이다.)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x + 4 > 3x + 10$ 에서 $x^2 - x - 6 > 0$, $(x+2)(x-3) > 0$

$\therefore x < -2$ 또는 $x > 3$

따라서, $a = -2$, $b = 3$ 이므로 $a + b = 1$

13. 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$　　② $-6 < a < -2$　　③ $a \geq 3$, $a \leq -1$

④ $a \geq 0$　　⑤ $a \leq 5$

해설

$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$

$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$

항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.

$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$

$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$

$\Rightarrow -6 < a < -2$

14. 이차함수 $y = x^2 + x + 1$ 의 그래프가 함수 $y = kx^2 + kx - 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 \le k < 1$　② $-2 < k \le 3$　③ $-7 < k \le 1$

④ $1 < k \le 5$　⑤ $1 \le k < 7$

해설

$x^2 + x + 1 > kx^2 + kx - 1$ 에서

$(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 < 0$

(i) $k - 1 = 0$, 즉 $k = 1$ 일 때

$-2 < 0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k - 1 \ne 0$, 즉 $k \ne 1$ 일 때

주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k - 1 < 0$

$\therefore k < 1 \cdots$ ㉠

한편, 이차방정식 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (k-1)^2 + 8(k-1) < 0$ 에서

$(k+7)(k-1) < 0$

$\therefore -7 < k < 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-7 < k < 1$

(i), (ii) 에서 $-7 < k \le 1$

15. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$ ② $-1 \le k \le 2$ ③ $-5 \le k \le -2$

④ $-7 < k \le -1$ ⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면
(i) $D \ge 0$ 이므로

$k^2+k-6 \ge 0$

$(k+3)(k-2) \ge 0$

$\therefore k \le -3, k \ge 2$

(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서

$-k > 1$

$\therefore k < -1$

(iii) $f(1) > 0$ 이므로

$1+2k+6-k > 0$

$\therefore k > -7$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7 < k \le -3$

16. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

17. 연립부등식 $ax+3 \le -4x+7$, $5x-2 \le 6x+b$의 해가 $x=2$일 때, $a \times b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 식을 정리하면

$ax+3 \le -4x+7 \qquad \therefore\ x \le \dfrac{4}{a+4}$

$5x-2 \le 6x+b \qquad \therefore\ x \ge -b-2$

해가 $x=2$가 되기 위해서는 $\dfrac{4}{a+4}=2$, $-b-2=2$이어야 한다.

$\therefore\ a=-2,\ b=-4$

$\therefore\ a \times b=(-2)\times(-4)=8$

18. x에 관한 연립부등식 $-1 \le -\frac{1}{2}x - a \le 3$의 해가 $-2 \le x \le 6$일 때, a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ -3 ⑤ -2

해설

(i) $-1 \le -\frac{1}{2}x - a$, $x \le -2a + 2$

(ii) $-\frac{1}{2}x - a \le 3$, $x \ge -2a - 6$

$-2a - 6 \le x \le -2a + 2$와 $-2 \le x \le 6$이 같으므로

$-2a - 6 = -2$, $a = -2$

$-2a + 2 = 6$, $a = -2$

$\therefore\ a = -2$

19. 다음 부등식을 풀어라.

$$|x-1| > |x-2|$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > \dfrac{3}{2}$

해설

i) $x < 1$일 때,

$-(x-1) > -(x-2)$에서 $1 > 2$이므로 모순

ii) $1 \le x < 2$일 때,

$(x-1) > -(x-2)$에서

$2x > 3,\ x > \dfrac{3}{2}$

조건에서 $1 \le x < 2$이므로 $\dfrac{3}{2} < x < 2 \cdots$ ㉠

iii) $x \ge 2$일 때, $(x-1) > (x-2)$에서 $1 < 2$이므로 성립

$\therefore\ x \ge 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x > \dfrac{3}{2}$

20. 부등식 $2|x+2|+|x-1| \le 6$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2|x+2|+|x-1| \le 6$에서 범위를 나누어 생각해보면,

ⅰ) $x < -2$

$-2 \cdot (x+2)-(x-1) = -3x-3 \le 6, \ x \ge -3$

$\therefore \ -3 \le x < -2$

ⅱ) $-2 \le x < 1$

$$\begin{aligned} 2(x+2)-(x-1) &= 2x+4-x+1 \\ &= x+5 \le 6, \quad x \le 1 \end{aligned}$$

$\therefore -2 \le x < 1$

ⅲ) $x \ge 1$

$2(x+2)+(x-1) = 3x+3 \le 6, \ x \le 1$

$\therefore \ x = 1$

$\therefore \ -3 \le x \le 1$, 5개

21. 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하면?

$\lvert x^2-2x\rvert = y-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠ $y \le x+1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개　　④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y=\lvert x^2-2x\rvert+1$ 이므로

㉡에 대입하면 $\lvert x^2-2x\rvert \le x$

(i) $x^2-2x \ge 0$ $(x \le 0,\ x \ge 2)$ 일 때

$x^2-2x \le x$

$\therefore\ x(x-3) \le 0$

$\therefore\ 0 \le x \le 3$

조건과 공통범위를 구하면 $x=0,\ 2 \le x \le 3$

(ii) $x^2-2x<0$ $(0<x<2)$ 일 때

$-(x^2-2x) \le x$

$\therefore\ x(x-1) \ge 0$

$\therefore\ x \le 0,\ x \ge 1$

조건과 공통 범위를 구하면 $1 \le x < 2$

(i), (ii) 에서 정수 x를 구하면 $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$

x의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y=1,\ 2,\ 1,\ 4$

구하는 순서쌍$(x,\ y)$는

$(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),(3,4)$

따라서 구하는 개수는 4 개다.

22. 부등식 $\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2-|x|-2) \le 0$ 을 풀면?

① $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -2$　　② $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -1$

③ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -1$　　④ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -2$

⑤ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le 0$

해설

① $x > 0$이면 $|x| = x,\ x + \frac{1}{x} > 0$이므로

$x^2 - x - 2 \le 0 \ \rightarrow\ (x-2)(x+1) \le 0$

$\therefore\ -1 \le x \le 2$

$\therefore\ 0 < x \le 2\ (\because\ x > 0)$

② $x < 0$이면 $|x| = -x,\ x + \frac{1}{x} < 0$이므로

$x^2 + x - 2 \ge 0 \ \rightarrow\ (x-1)(x+2) \ge 0$

$\therefore\ x \le -2,\ x \ge 1$

$\therefore\ x \le -2\ (\because\ x < 0)$

①, ②에서 $0 < x \le 2,\ x \le -2$

23. 다음은 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $m<x<n$ $(m<0,\ n<0)$ 일 때, 부등식 $cx^2+bx+a>0$의 해를 구하는 과정이다.

$ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)>0$ 에서 $m<x<n$ 의 해가 나오려면 a 는 (가)이어야 한다. 또, $b=-a(m+n),\ c=amn$ 이므로 $cx^2+bx+a>0$ 은 $amnx^2-a(m+n)x+a>0$ 여기서 a는 (가)이므로 $mnx^2-(m+n)x+1<0$ mn 는 (나)이므로 위 식을 mn 로 나누어 정리하면$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$ $\therefore$ (다) $<x<$ (라)

위 풀이 과정 중 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

① 양수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
② 음수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
③ 음수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
④ 양수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
⑤ 음수, 양수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$

해설

$a(x-m)(x-n)<0 \iff m<x<n$ 이므로
a 는 음수이어야 한다.
$m<0,\ n<0$ 이므로 $mn>0$
즉, 양수이고 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 이므로
$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0 \iff \frac{1}{n}<x<\frac{1}{m}$

24. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$일 때, 부등식 $4cx^2-2bx+a>0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면?

① $-7<x<-5$ ② $-5<x<-3$ ③ $-3<x<-1$

④ $5<x<7$ ⑤ $7<x<9$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가

$\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$이므로 $a<0$

$\left(x-\frac{1}{14}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)<0$에서

$(14x-1)(10x-1)<0$

$\therefore\ -140x^2+24x-1>0$

$a=-140k,\ b=24k,\ c=-k$라 놓고

(단, $k>0 \leftarrow a<0$)

$4cx^2-2bx+a>0$에 대입하면

$-4kx^2-2\cdot 24kx-140k>0$

$x^2+12x+35<0$

$\therefore\ (x+7)(x+5)<0 \quad \therefore -7<x<-5$

25. x에 대한 이차부등식 $a(2x^2+1) \le (x-1)^2$의 해가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $0 < a < \frac{3}{2}$

② $a > \frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$

④ $a \ge \frac{3}{2}$

⑤ $a < \frac{1}{2}$ 또는 $a > \frac{3}{2}$

해설

$a(2x^2+1) \le (x-1)^2$에서

$2ax^2 + a \le x^2 - 2x + 1$,

$(2a-1)x^2 + 2x + a - 1 \le 0$이므로

$2a - 1 > 0$일 때

즉 $a > \frac{1}{2}$일 때

$\frac{D}{4} = 1 - (2a-1)(a-1)$

$= 1 - (2a^2 - 3a + 1) = -2a^2 + 3a < 0$이어야

모든 x에 대하여 성립한다.

즉 $a(2a-3) > 0$

$a < 0$ 또는 $a > \frac{3}{2}$인데

$a > \frac{1}{2}$이어야 하므로

$a > \frac{3}{2}$

26. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-5x+4 \le 0 \\ x^2-(k+3)x+3k > 0 \end{cases}$ 의 해가 $3 < x \le 4$ 가 되도록 하는 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < k < 1$　② $-1 < k < 3$　③ $k \ge -1$

④ $k \le 1$　⑤ $-1 \le k \le 3$

해설

$x^2-5x+4 \le 0$에서 $(x-1)(x-4) \le 0,\ 1 \le x \le 4$

$x^2-(k+3)x+3k > 0$에서 $(x-k)(x-3) > 0$

ⅰ) $x < k$ 또는 $x > 3$

ⅱ) $x < 3$ 또는 $x > k$

해가 $3 < x < 4$가 되려면 ⅰ)의 경우이어야 하고 $k \le 1$ 이어야 한다