

1. 다음 보기에서 y 가 x 에 관한 이차함수인 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 반지름의 길이가 x 인 원의 넓이는 y
- ㉡ 양초의 길이가 24cm 이고 불을 붙이면 20 분에 8cm 씩 짧아질 때, 양초가 탄 시간을 x , 양초의 길이는 y
- ㉢ 한 변의 길이가 x 인 정사각형의 넓이는 y
- ㉤ 밑변의 길이가 x , 높이는 밑변의 길이의 2 배인 삼각형의 넓이는 y

① ㉠, ㉤

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉤

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

식으로 나타내면 다음과 같다.

㉠ $y = \pi x^2$

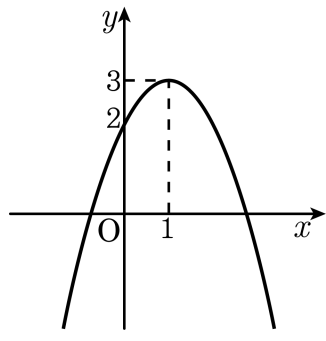
㉡ $y = 24 - \frac{2}{5}x$

㉢ $y = x^2$

㉤ $y = \frac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$

따라서 이차함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉤이다.

2. 다음 그림은 이차함수의 그래프를 그린 것이다. 이 이차함수의 식을 구하면?



① $y = -2x^2 + 4x + 2$

② $y = -x^2 + 2x + 2$

③ $y = -2x^2 - 4x + 2$

④ $y = -x^2 - 2x + 2$

⑤ $y = -3x^2 - 6x + 2$

해설

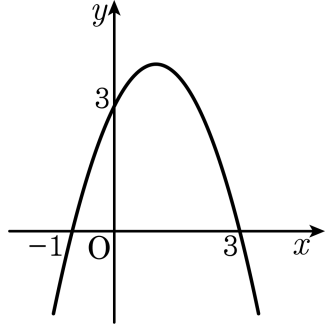
$y = a(x - 1)^2 + 3$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$2 = a(0 - 1)^2 + 3$, $a = -1$ 이다.

$$\therefore y = -(x - 1)^2 + 3$$

$$= -x^2 + 2x + 2$$

3. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $(1, k)$ 가 이 그래프 위의 점일 때, k 의 값은?

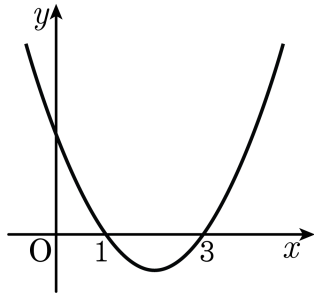


- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점 $(-1, 0), (0, 3), (3, 0)$ 을 각각 대입하여 a, b, c 를 구하면
 $a = -1, b = 2, c = 3$
 $\therefore y = -x^2 + 2x + 3$
 $(1, k)$ 를 대입하면 $k = 4$ 이다.

4. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 - ax + 3b$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$ 에서 만날 때, $a + b$ 의 값은?



- ① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

x 절편이 1, 3 이므로
 $y = (x - 1)(x - 3)$
 $y = x^2 - 4x + 3$
 $\therefore a = 4, b = 1$

5. x 축과의 교점이 $(3, 0)$, $(-2, 0)$ 이고, 점 $(1, 6)$ 을 지나는 이차함수의 식을 구하면?

① $y = x^2 + x + 6$

② $y = -x^2 + x + 6$

③ $y = x^2 - x + 6$

④ $y = x^2 + x - 6$

⑤ $y = -x^2 - x + 6$

해설

x 축과의 교점이 $(3, 0)$, $(-2, 0)$ 이므로

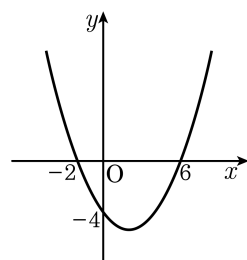
$$y = a(x-3)(x+2)$$

점 $(1, 6)$ 을 지나므로

$$6 = a(1-3)(1+2), a = -1$$

$$\therefore y = -(x-3)(x+2) = -x^2 + x + 6$$

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 이차함수의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{16}{3}$

해설

x 절편이 $-2, 6$ 이므로

$$y = a(x + 2)(x - 6)$$

점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4 = a(0 + 2)(0 - 6), \quad a = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(x + 2)(x - 6)$$

$$= \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 4$$

$$= \frac{1}{3}(x - 2)^2 - \frac{16}{3}$$

따라서 $x = 2$ 일 때, 최솟값은 $-\frac{16}{3}$

7. 이차함수 $y = a(x + b)^2 + 4$ 에서 x 축의 방향으로 3, y 축의 방향으로 2 만큼 움직였을 때 최솟값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = a(x + b)^2 + 4$ 에서 $a > 0$ 이므로 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.

x 축의 방향의 이동에 상관없이 y 축의 방향의 이동만 고려하면 되므로

$$4 + 2 = 6$$

8. 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + k - 1$ 의 최솟값이 10 일 때, 그 때의 x 값과 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $k = 19$

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 8x + k - 1 \\ &= 2(x + 2)^2 - 8 + k - 1 \\ &= 2(x + 2)^2 + k - 9 \end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 $k - 9$ 를 가지므로 $k - 9 = 10$

$\therefore k = 19$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + b$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$y = x^2 - 2ax + b$ 가 $x = 2$ 일 때,
최솟값이 -2 이므로
 $y = (x - 2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$
 $\therefore 2a = 4, a = 2, b = 2$

10. 합이 20 인 두 수의 곱이 최대가 될 때, 이 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 10

해설

두 수를 각각 x , $20 - x$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(20 - x) \\ &= -x^2 + 20x \\ &= -(x - 10)^2 + 100 \end{aligned}$$

$x = 10$ 일 때, 최댓값 100을 갖는다.

$\therefore x = 10$, $20 - x = 10$

따라서 두 수는 10, 10

11. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 x cm 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x$ cm 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 $y\text{cm}^2$ 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

- ㉠ $\frac{5}{2}$ ㉡ $\frac{15}{2}$ ㉢ $\frac{25}{2}$ ㉣ $\frac{31}{5}$ ㉤ $\frac{16}{5}$

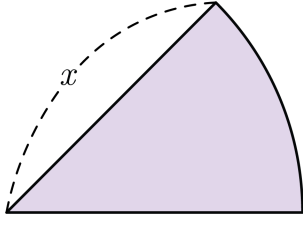
해설

줄어든 가로의 길이는 $(8 - x)\text{cm}$,
늘어난 세로의 길이는 $(6 + 2x)\text{cm}$ 에서

$$\begin{aligned} y &= (8 - x)(6 + 2x) \\ &= 48 + 10x - 2x^2 \\ &= -2 \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} \right) + 48 \\ &= -2 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{121}{2} \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

12. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

부채꼴의 넓이를 y , 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\&= x(6 - x) \\&= -x^2 + 6x \\&= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\&= -(x - 3)^2 + 9\end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채
꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

13. 이차방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때, 실수 $a + b + 2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

근이 실수이면 $D \geq 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - 2\{1 + (a + b)^2\} \geq 0$$

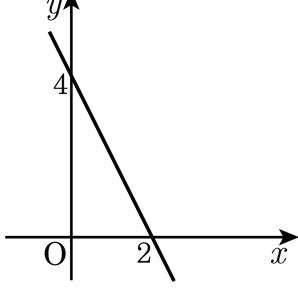
$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\therefore (a + b + 1)^2 \leq 0$$

a, b 는 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b + 2 = 1$$

14. $y + ax + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차를 구하면?



- ① 2 ② -2 ③ $\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $-2\sqrt{5}$

해설

두 점 $(0, 4)$, $(2, 0)$ 을 $y + ax + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -4$
 $\therefore x^2 + 2x - 4 = 0$
두 근의 합은 -2 이고 곱은 -4 이다.
이차방정식의 두 근을 α , β 라고 하면,
두 근의 차 $|\alpha - \beta|$ 는
 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서
 $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$ 이므로
두 근의 차는
 $\pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-4)} = \pm \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 + a - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 근 α, β 를 가질 때, $\alpha + \beta$ 의 범위는 $m < \alpha + \beta < n$ 이다. $m + n$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

근과 계수의 관계에서
 $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = a^2 + a - 1$
서로 다른 두 근을 가지므로
 $a^2 - 4a^2 - 4a + 4 > 0$
 $(3a - 2)(a + 2) < 0$
 $-2 < a < \frac{2}{3}$
그런데 $\alpha + \beta = -a$ 이므로
 $-\frac{2}{3} < \alpha + \beta < 2$
 $\therefore m + n = \frac{4}{3}$

16. 이차방정식 $2x^2 - 2ax + 12 = 0$ 의 두 근의 비가 $2 : 3$ 이 되는 a 의 값은?

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

두 근을 각각 $2k, 3k(k \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2(x - 2k)(x - 3k) &= 2x^2 - 10kx + 12k^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + 12 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \pm 1$$

$$10k = 2a \text{ 이므로}$$

$$k = 1 \text{ 일 때 } a = 5$$

$$k = -1 \text{ 일 때 } a = -5$$

$$\therefore a = \pm 5$$

17. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근을 구하는데 소연은 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ 가 나왔고, 소희는 상수항을 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 2 \pm \sqrt{6}$ 이 나왔다. 이 때, ab 의 값은?

- ① -4
- ② -2
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두근의 합은 $-a$,
두 근의 곱은 b 이다.
소연이는 상수항은 제대로 본 것이므로 소연이가 구한 두 근의 곱은
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1 = b$
한편, 소희는 일차항을 제대로 본 것이므로 소희가 구한 두 근의 합은
 $(2 + \sqrt{6}) + (2 - \sqrt{6}) = -a$
 $\therefore a = -4, b = -1$
 $\therefore ab = 4$

해설

소연이 푼 식은
 $\{x - (1 + \sqrt{2})\} \{x - (1 - \sqrt{2})\} = 0$
소연이는 상수항을 제대로 본 것이므로 구하는 상수항 $b =$
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$
소희가 푼 식은
 $\{x - (2 + \sqrt{6})\} \{x - (2 - \sqrt{6})\} = 0$
소희는 일차항의 계수를 제대로 본 것이므로 일차항의 계수는
 $a = -2 + \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} = -4$
따라서, 처음 이차방정식은 $x^2 - 4x - 1 = 0$
 $\therefore ab = 4$

18. 세 자리 자연수가 있다 각 자리의 수의 합은 10 이고, 가운데 자리의 수의 4배는 다른 두 자리의 수의 합과 같다.
또, 이 자연수의 각 자리의 수를 거꾸로 늘어놓아 얻은 자연수는 처음 자연수보다 198만큼 크다. 처음 자연수는?

① 235 ② 325 ③ 532 ④ 523 ⑤ 358

해설

일, 십, 백의 자리의 수를 각각 p, q, r 라 하면
 p, q 는 0 이상 10 미만의 정수이고
 r 은 1 이상 10 미만의 자연수이다.

$$\begin{cases} p + q + r = 10 \cdots \textcircled{1} \\ 4q = p + r \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $q = 2$

$$100p + 20 + r = 100r + 20 + p + 198$$

$$p - r = 2 \cdots \textcircled{3}$$

$$q = 2 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } p + r = 8 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ 에서 } p = 5, r = 3$$

따라서 구하는 수는 325 이다.

19. 4월 중 2박 3일 동안 봉사활동을 하는데 봉사활동의 둘째 날의 날짜의 제곱은 나머지 2일의 날짜의 합과 같다. 봉사활동이 끝나는 날의 날짜는?

- ① 4월 1일 ② 4월 2일 ③ 4월 3일
④ 4월 4일 ⑤ 4월 5일

해설

봉사활동을 하는 날을 $x-1$, x , $x+1$ 이라 하면

$$x^2 = (x-1) + (x+1)$$

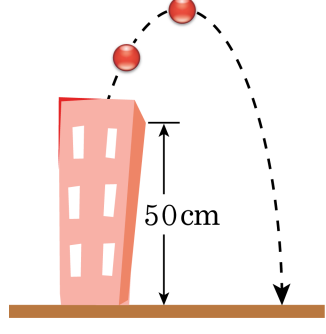
$$x^2 = 2x$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 2 \text{ (일)}$$

따라서 봉사활동이 끝나는 날은 하루 뒤인 4월 3일이다.

20. 지면으로부터 50m 되는 높이에서 초속 25m 로 위에 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 t 와 h 사이에는 $h = -5t^2 + 25t + 50$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 올라가는 최고점의 높이를 구하여라. (단, 단위는 생략)



▶ 답 :

▷ 정답 : 81.25

해설

최고점까지 걸린 시간은 옥상의 높이와 같은 50m 를 지날 때의 시간의 절반이므로

$$-5t^2 + 25t + 50 = 50$$

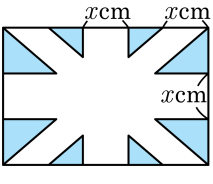
$$t = 5$$

따라서 최고점까지 걸린 시간은 2.5 초이다.

최고점까지의 거리는 물체가 2.5 초만큼 움직인 거리이므로

$$h = -5t^2 + 25t + 50 = 81.25(\text{m})$$

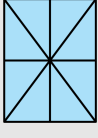
21. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 12 cm^2 가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



- ① 2 cm ② 3 cm
③ 4 cm ④ 2 cm 또는 7 cm
⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9 - 3x$, 세로가 $6 - x$ 인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9 - 3x)(6 - x) = 12$
정리하면 $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7) = 0$
 $x < 3$ 이므로 $x = 2$



22. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프는 점 $(a, 12)$ 를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다. 이 때, ab 의 값은?

① ± 2

② ± 3

③ ± 5

④ ± 6

⑤ ± 7

해설

$y = 3x^2$ 에 $(a, 12)$ 를 대입하면 $a = \pm 2$ 이다.

x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 $b = -3$ 이다.

$\therefore ab = \pm 6$

23. 이차함수 $y = -\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 m 만큼 평행이동하면 점 $(\sqrt{3}, -5)$ 를 지난다고 할 때, m 의 값은?

① 4 ② 5 ③ -5 ④ -3 ⑤ -2

해설

$y = -\frac{2}{3}x^2 + m$ 에 점 $(\sqrt{3}, -5)$ 를 대입하면

$$-5 = -\frac{2}{3}(-\sqrt{3})^2 + m$$

$$\therefore m = -3$$

24. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

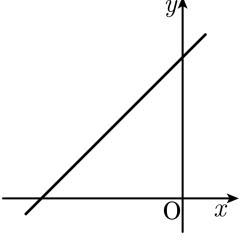
$$y = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b,$$

꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} + b = 0$,

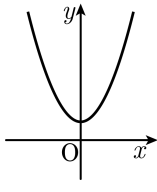
$$b = \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{a^2}{b} = a^2 \times \frac{1}{b} = a^2 \times \frac{4}{a^2} = 4$$

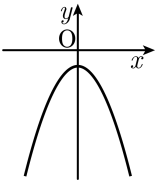
25. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 개형은?



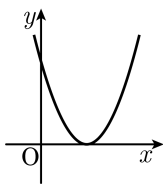
①



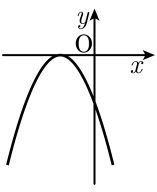
②



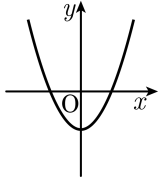
③



④



⑤



해설

$y = ax + b$ 의 그래프에서
 $a > 0, b > 0$ 이다.

26. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$

㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$

㉣ $-3(x+2)^2$

㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

㉠ $1 < |a| < \frac{1}{2}$

㉡ $1 < |a| < \frac{3}{2}$

㉢ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

㉣ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$

㉤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡ $\frac{1}{2}$ ㉢ 2 ㉣ 3 ㉤ 1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉣, ㉠, ㉢, ㉤

이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로

㉣ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

27. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + 2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (a, b) 이고,
 y 축과의 교점의 y 좌표가 q 일 때, $\frac{a+b}{q}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -3x^2 - 6x + 2$ 의 식을 $y = a(x+p)^2 + q$ 의 꼴로 바꾸면
 $y = -3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2$

$y = -3(x+1)^2 + 5$ 이므로

i) 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 5) \therefore a = -1, b = 5$

ii) y 축과 만나는 점의 x 좌표는 0 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$q = 2$

따라서 $\frac{a+b}{q} = \frac{(-1)+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ 이다.

28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 점 $(-5, -7)$ 일 때, 이 함수의 그래프가 제4 사분면을 지나지 않기 위해서 a 값이 가질 수 있는 범위는?

① $a \leq -\frac{3}{4}$
④ $a \leq \frac{7}{25}$

② $a \geq -\frac{3}{4}$
⑤ $0 < a \leq \frac{7}{5}$

③ $a \geq \frac{7}{25}$

해설

$$y = a(x + 5)^2 - 7 = ax^2 + 10ax - 7 + 25a$$

$$(y\text{절편}) \geq 0$$

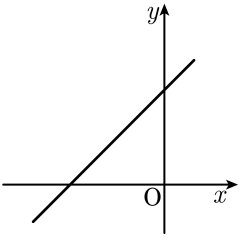
$$-7 + 25a \geq 0$$

$$\therefore a \geq \frac{7}{25}$$

29. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?

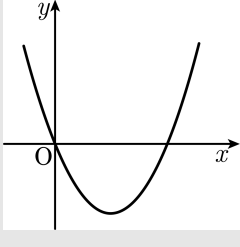
- ① x 축 위
- ② y 축 위
- ③ 제 1 사분면
- ④ 제 2 사분면

⑤ 제 4 사분면

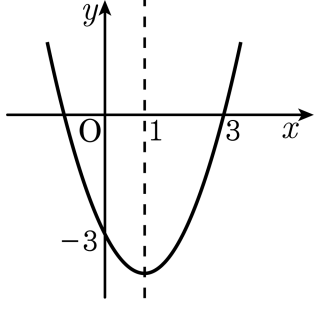


해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점과 축은 y 축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



30. 다음 그림은 직선 $x = 1$ 을 축으로 하는 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?



- ① -4 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$y = a(x - 1)^2 + q$
 $x = 0$ 일 때, $a + q = -3$ (1)
 $x = 3$ 일 때, $4a + q = 0$ (2)
(2)에서 (1)을 빼면, $3a = 3$
 $\therefore a = 1, q = -4$
 $y = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$
따라서 $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c = -4$ 이다.

31. 세 점 $(0, -4)$, $(1, -1)$, $(2, 8)$ 을 지나는 이차함수의 식이 $y = ax^2 + bx + c$ 일 때, 이차함수 $y = bx^2 + cx + a$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

- ☐

㉠ 아래로 볼록한 형태의 그래프이다.
- ☐

㉡ y 절편은 3 이다.
- ☐

㉢ x 절편은 두 개이다.
- ☐

㉣ 왼쪽 위를 향하는 포물선 그래프이다.
- ☐

㉤ 왼쪽 위를 향한다.

- ①

㉠,㉡
- ②

㉡,㉢
- ③

㉡,㉤
- ④

㉢,㉣
- ⑤

㉣,㉤

해설

세 점 $(0, -4)$, $(1, -1)$, $(2, 8)$ 을 지나므로

$$-4 = c$$
$$-1 = a + b + c$$
$$8 = 4a + 2b + c$$

세 식을 연립하면, $a = 3$, $b = 0$, $c = -4$ 이다.

따라서 $y = bx^2 + cx + a$ 는

$$y = -4x + 3$$

이고, 이 함수의 그래프는 y 절편이 3 이고 왼쪽 위를 향하는 직선이다.

32. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a, 2a - 7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x + 4a \\ &= -3(x-1)^2 + 3 + 4a \end{aligned}$$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로
 $2a-7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,
 $(3a+7)(a-1) = 0$

$$\therefore a = -\frac{7}{3} \text{ or } 1$$

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

33. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1, 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3, -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1, 2)$ 를 대입하면

$$2 = 4a - 4$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{19}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}, b = -9, c = \frac{19}{2}$$

$$\therefore a - b - c = \frac{3}{2} - (-9) - \frac{19}{2} = 1$$

34. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x + k)^2 + k^2 + 4k$$

$$M = k^2 + 4k \text{ 이므로}$$

$$M = (k + 2)^2 - 4 \text{ 이다.}$$

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

35. 밑면의 길이와 높이의 합이 28 인 삼각형의 넓이가 최대가 될 때 밑변과 높이의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 밑변 : 14

▷ 정답 : 높이 : 14

해설

삼각형의 넓이를 y 라 하면, 밑변을 x , 높이는 $28 - x$ 라 두면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28 - x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 14x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x + 196 - 196) \\ &= -\frac{1}{2}(x - 14)^2 + 196 \end{aligned}$$

따라서 밑변은 14 , 높이는 14이다.

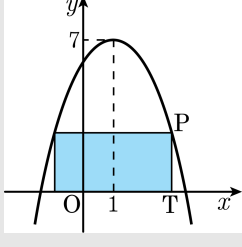
36. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{(둘레의 길이)} &= 2\{2(t - 1) - t^2 + 2t + 5\} \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t - 2)^2 + 14 \end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

37. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

- ① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다.

해설

$$y = 50t - 5t^2$$

$$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t - 5)^2 + 125$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.

38. 이차방정식 $2x^2 + bx + c = 0$ 의 근을 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ 이라 할 때,
이차방정식 $2x^2 - bx - c = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -3 ③ -4 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 1

해설

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8c}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \text{ 이므로}$$

$$b = 3, c = -1$$

$$\therefore 2x^2 - 3x + 1 = 0, (2x - 1)(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 두 근의 합은 $\frac{3}{2}$ 이다.

39. 이차방정식 $x^2 - 6x + (a - 1) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a 값을 모두 더한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x^2 - 6x = -a + 1, x^2 - 6x + 9 = -a + 10, (x - 3)^2 = -a + 10$
 $x - 3 = \pm \sqrt{-a + 10}, x = 3 \pm \sqrt{10 - a}$
두 근이 정수가 되려면 $10 - a$ 가 제곱수가 되어야 하므로
 $10 - a = 9, 4, 1$ 에서 $a = 1, 6, 9$
 a 값들의 합은 $1 + 6 + 9 = 16$ 이다.

40. $\frac{1}{2xy} + \frac{5y-1}{x} + \frac{x}{2y} - 3 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

▷ 정답 : $y = 1$

해설

$\frac{1}{2xy} + \frac{5y-1}{x} + \frac{x}{2y} - 3 = 0$ 을 정리하면

$$x^2 - 6yx + 10y^2 - 2y + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

근의 공식에서

$$x = 3y \pm \sqrt{9y^2 - 10y^2 + 2y - 1}$$

$$\therefore x = 3y \pm \sqrt{-y^2 + 2y - 1}$$

이때, x, y 는 실수이므로 $-y^2 + 2y - 1 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2 \leq 0$$

$$\therefore y = 1$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3$$

따라서 $x = 3, y = 1$ 이다.

41. 정수 m, n 에 대하여 이차방정식 $(m+1)x^2 + 2x + n + 3 = 0$ 이 중근을 가질 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 0

해설

$$\frac{D}{4} = 1 - (m+1)(n+3) = 0$$

$$mn + m + n + 2 = 0$$

$$(m+1)(n+1) = -1$$

$$(m+1, n+1) = (1, -1), (-1, 1)$$

$$m = 0, -2$$

따라서 m 의 최댓값은 0 이다.

42. 이차방정식 $x^2-6x+3=0$ 의 두 근이 p, q 라 할 때, $\sqrt{p^4+p^2q^2+q^4}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $9\sqrt{11}$

해설

$$p^4+p^2q^2+q^4=(p^2+pq+q^2)(p^2-pq+q^2)$$

$$p+q=6, \quad pq=3$$

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=36-6=30$$

$$\begin{aligned}(p^2+pq+q^2)(p^2-pq+q^2) &= (30+3)(30-3) \\ &= 891\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{p^4+p^2q^2+q^4} &= \sqrt{(p^2+pq+q^2)(p^2-pq+q^2)} \\ &= \sqrt{891} \\ &= 9\sqrt{11}\end{aligned}$$

43. $\frac{13}{5-2\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 m , 소수 부분을 n 이라 할 때, n 은 이차방정식 $\frac{m}{4}x^2 + ax - b = 0$ 의 한 근이다.
이때, 유리수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$\frac{13}{5-2\sqrt{3}} = 5 + 2\sqrt{3} = 8. \times \times \times$ 이므로 정수 부분 $m = 8$, 소수 부분 $n = -3 + 2\sqrt{3}$
 n 이 한 근이므로 $-3 - 2\sqrt{3}$ 도 한 근이다.
두 근의 합은 -6 , 두 근의 곱은 -3
 $\frac{m}{4}x^2 + ax - b = 0 \leftrightarrow 2x^2 + ax - b = 0$
 $a = 12, b = 6$
 $\therefore ab = 72$

44. 지면에서 10m/s 의 속도로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이 h 가 된다. 이때, $h = 5(5t - t^2)$ 이라면 공이 10m 이상의 높이에서 머무르는 시간은 몇 초인지 구하여라.

▶ 답 : 초

▷ 정답 : $\sqrt{17}$ 초

해설

공의 높이가 10m 일 때이므로 $h = 10$ 을 대입하면

$$10 = 5(5t - t^2)$$

$$t^2 - 5t + 2 = 0$$

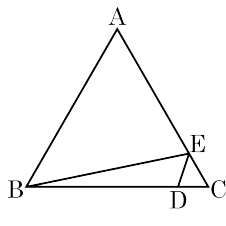
$$\therefore t = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

따라서 $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ 초 후에 공이 10m 를 지나 올라갔다가 $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$

초 후에 높이 10m 를 지나 떨어지므로 공이 10m 이상의 높이에

서 머무는 시간은 $\frac{5 + \sqrt{17}}{2} - \frac{5 - \sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$ (초) 동안이다.

45. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6 인 정삼각형에서 $\angle BED = 60^\circ$, $\overline{CD} = 1$ 일 때, 선분 AE의 길이를 구하여라. (단, $\overline{AE} > 3$)



▶ 답 :

▷ 정답 : $3 + \sqrt{3}$

해설

$\triangle ABE \sim \triangle CED$ (AA 닮음) 이므로

$$\overline{AB} : \overline{CE} = \overline{AE} : \overline{CD}$$

$\overline{AE} = x$ 라 놓으면

$$6 : (6 - x) = x : 1$$

$$\therefore 6x - x^2 = 6, x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 3 + \sqrt{3} (\because x > 3)$$

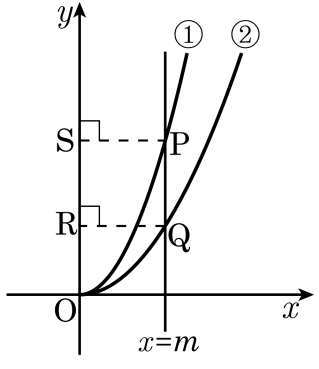
46. 밑면의 반지름의 길이가 7cm 이고 높이가 h cm 인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름의 길이를 조금 줄였더니 원기둥의 부피가 처음보다 64% 감소했을 때, 줄인 반지름의 길이는?

- ① 2.5cm ② 2.6cm ③ 2.7cm
④ 2.8cm ⑤ 2.9cm

해설

반지름의 줄인 길이를 x cm 라 하면
원래 원기둥의 부피는 $7^2\pi h$ cm
나중 원기둥의 부피는 $(7-x)^2\pi h$ cm
부피가 64% 감소했으므로
 $(7-x)^2\pi h = 0.36 \times 7^2\pi h$
 $(7-x)^2 = (0.6 \times 7)^2$
 $x > 0$ 이므로 $7-x = 4.2$
 $\therefore x = 2.8$ (cm)

47. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{3}{4}x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{1}$, $y = \frac{1}{3}x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{2}$ 의 그래프이다. y 축에 평행한 직선 $x = m (m > 0)$ 이 $\textcircled{1}$ 과 만나는 점을 P, $\textcircled{2}$ 와 만나는 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 y 축에 내린 수선이 y 축과 만나는 점을 각각 S, R이라 할 때, $\square PQRS$ 가 정사각형이 되는 m 의 값을 구하면?



- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{13}{5}$

해설

$\square PQRS$ 가 정사각형이 되려면

$$\frac{3}{4}m^2 - \frac{1}{3}m^2 = m \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{이것을 풀면 } \frac{5}{12}m^2 = m$$

$$\text{따라서 } m > 0 \text{ 이므로 } m = \frac{12}{5} \text{ 이다.}$$

48. 두 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 5$, $y = -3x^2 + 12x - 4$ 의 그래프가 $y = p$ 와 만나는 두 점을 각각 A, B 와 C, D 라 하고 y 축과 만나는 점을 각각 E, F, 직선 $x = q$ 와 만나는 점을 각각 G, H 라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ 의 값을 구하여라. (단, $p < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -3x^2 + 6x + 5$ 는 $y = -3(x - 1)^2 + 8$
 $y = -3x^2 + 12x - 4$ 는 $y = -3(x - 2)^2 + 8$ 이므로
 $y = -3x^2 + 12x - 4$ 의 그래프는 $y = -3x^2 + 6x + 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 두 그래프의 폭이 같다.
 $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{EF} = \overline{GH}$
 $\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = 2$

49. 이차함수 $y = 4x^2$ 의 그래프 위의 점 P와 점 Q는 좌표의 y값이 같다. 두 점 P와 Q 그리고 A(3, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQA의 넓이가 32일 때, 점 P와 점 Q의 y 좌표값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 P의 좌표를 $(a, 4a^2)$ 이라 하면 점 Q의 좌표는 $(-a, 4a^2)$

이므로

삼각형 PQA는 밑변이 $2a$, 높이는 $4a^2$ 이다.

$$\Delta PQA = \frac{1}{2} \times 2a \times 4a^2 = 4a^3 = 32$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 점 P와 점 Q의 y 좌표값은 16이다.

50. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ 일 때, $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{379}{50}$

해설

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2 = k \text{ 라 하면}$$

$$x+2=2k, y+1=3k, z-2=k$$

이를 $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ 에 대입하면

$$(5k-3)^2 + (4k+1)^2 + (3k)^2$$

$$= 50k^2 - 22k + 10$$

$$= 50 \left(k - \frac{11}{50} \right)^2 + \frac{379}{50}$$

따라서 $k = \frac{11}{50}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{379}{50}$ 이다.