1. 다음 보기에서 y 가 x 에 관한 이차함수인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 반지름의 길이가 x 인 원의 넓이는 y

㉡ 양초의 길이가 24cm 이고 불을 붙이면 20 분에 8cm 씩 짧아질 때, 양초가 탄 시간을 x , 양초의 길이는 y

㉢ 한 변의 길이가 x 인 정사각형의 넓이는 y

㉣ 밑변의 길이가 x , 높이는 밑변의 길이의 2 배인 삼각형의 넓이는 y

① ㉠, ㉣ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡,㉢, ㉣ ⑤ ㉠,㉡, ㉢, ㉣

해설

식으로 나타내면 다음과 같다.

㉠ $y = \pi x^2$

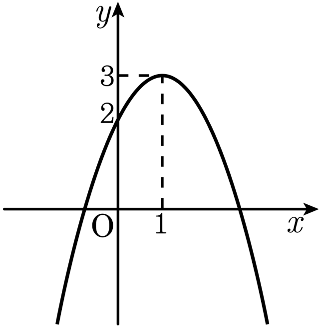
㉡ $y = 24 - \frac{2}{5}x$

㉢ $y = x^2$

㉣ $y = \frac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$

따라서 이차함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

2. 다음 그림은 이차함수의 그래프를 그린 것이다. 이 이차함수의 식을 구하면?



① $y=-2x^2+4x+2$

② $y=-x^2+2x+2$

③ $y=-2x^2-4x+2$

④ $y=-x^2-2x+2$

⑤ $y=-3x^2-6x+2$

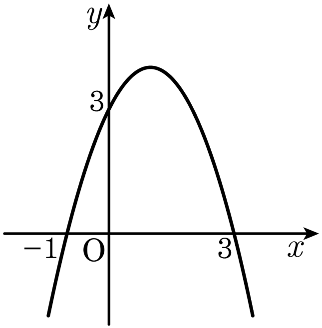
해설

$y=a(x-1)^2+3$ 이 점 $(0,\ 2)$ 를 지나므로

$2=a(0-1)^2+3,\ a=-1$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ y&=-(x-1)^2+3\\&=-x^2+2x+2\end{aligned}$$

3. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $(1, k)$가 이 그래프 위의 점일 때, k의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

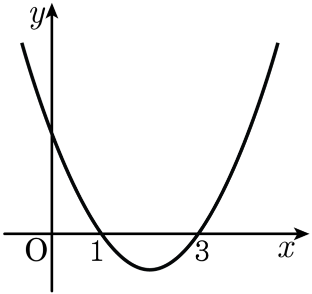
$y = ax^2 + bx + c$에 세 점 $(-1, 0), (0, 3), (3, 0)$을 각각 대입하여 a, b, c를 구하면

$a = -1, b = 2, c = 3$

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3$

$(1, k)$를 대입하면 $k = 4$이다.

4. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 - ax + 3b$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 에서 만날 때, $a + b$ 의 값은?



① -5　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 5

해설

x 절편이 1, 3 이므로

$y = (x - 1)(x - 3)$

$y = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 4, b = 1$

5. x 축과의 교점이 $(3,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ 이고, 점$(1,\ 6)$ 을 지나는 이차함수의 식을 구하면?

① $y=x^2+x+6$

② $y=-x^2+x+6$

③ $y=x^2-x+6$

④ $y=x^2+x-6$

⑤ $y=-x^2-x+6$

해설

x 축과의 교점이 $(3,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ 이므로

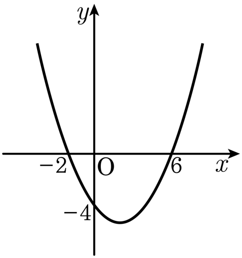
$y=a(x-3)(x+2)$

점 $(1,\ 6)$ 을 지나므로

$6=a(1-3)(1+2)$, $a=-1$

$\therefore\ y=-(x-3)(x+2)=-x^2+x+6$

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 이차함수의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{16}{3}$

해설

x 절편이 $-2,\ 6$ 이므로

$y = a(x+2)(x-6)$

점 $(0,\ -4)$ 를 지나므로

$-4 = a(0+2)(0-6),\ a = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(x+2)(x-6) \\ &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 4 \\ &= \frac{1}{3}(x-2)^2 - \frac{16}{3} \end{aligned}$$

따라서 $x = 2$ 일 때, 최솟값은 $-\frac{16}{3}$

7. 이차함수 $y=a(x+b)^2+4$ 에서 x 축의 방향으로 3 , y 축의 방향으로 2 만큼 움직였을 때 최솟값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=a(x+b)^2+4$ 에서 $a>0$ 이므로 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.
x축의 방향의 이동에 상관없이 y축의 방향의 이동만 고려하면 되므로
$4+2=6$

8. 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + k - 1$ 의 최솟값이 10 일 때, 그 때의 x 값과 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $k = 19$

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 8x + k - 1 \\ &= 2(x+2)^2 - 8 + k - 1 \\ &= 2(x+2)^2 + k - 9 \end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 $k - 9$ 를 가지므로 $k - 9 = 10$

$\therefore\ k = 19$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + b$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$y = x^2 - 2ax + b$ 가 $x = 2$ 일 때,
최솟값이 -2 이므로
$y = (x - 2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$
$\therefore\ 2a = 4,\ a = 2,\ b = 2$

10. 합이 20 인 두 수의 곱이 최대가 될 때, 이 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 10

해설

두 수를 각각 $x,\ 20-x$라 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(20-x) \\
&= -x^2+20x \\
&= -(x-10)^2+100
\end{aligned}
$$

$x=10$ 일 때, 최댓값 100을 갖는다.

$\therefore\ x=10,\ 20-x=10$

따라서 두 수는 10, 10

11. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 $x\text{cm}$ 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x\text{cm}$ 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 $y\text{cm}^2$ 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

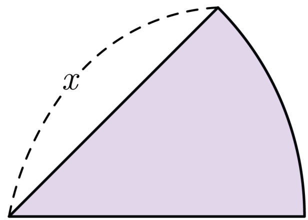
해설

줄어든 가로의 길이는 $(8-x)\text{cm}$,
늘어난 세로의 길이는 $(6+2x)\text{cm}$ 에서

$$\begin{aligned} y &= (8-x)(6+2x) \\ &= 48+10x-2x^2 \\ &= -2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+48 \\ &= -2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{121}{2} \end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

12. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

부채꼴의 넓이를 y, 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

13. 이차방정식 $\{1+(a+b)^2\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$ 의 근이 실수일 때, 실수 $a+b+2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

근이 실수이면 $D \geq 0$ 이므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\left\{1+(a+b)^2\right\} \geq 0$$

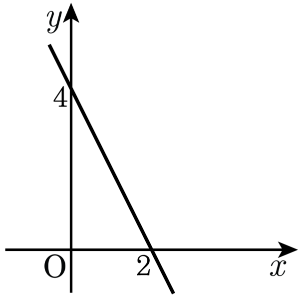
$(a+b)^2+2(a+b)+1 \leq 0$

$\therefore\ (a+b+1)^2 \leq 0$

$a,\ b$ 는 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b+2=1$

14. $y + ax + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차를 구하면?



① 2 ② -2 ③ $\sqrt{5}$

④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $-2\sqrt{5}$

해설

두 점 $(0, 4)$, $(2, 0)$ 을 $y + ax + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -4$

$\therefore x^2 + 2x - 4 = 0$

두 근의 합은 -2 이고 곱은 -4 이다.

이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면,

두 근의 차 $|\alpha - \beta|$는

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$에서

$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$이므로

두 근의 차는

$\pm\sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-4)} = \pm\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2+ax+a^2+a-1=0$ 이 서로 다른 두 근 α, β 를 가질 때, $\alpha+\beta$ 의 범위는 $m<\alpha+\beta<n$ 이다. $m+n$ 의 값은?

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=a^2+a-1$

서로 다른 두 근을 가지므로

$a^2-4a^2-4a+4>0$

$(3a-2)(a+2)<0$

$-2<a<\frac{2}{3}$

그런데 $\alpha+\beta=-a$ 이므로

$-\frac{2}{3}<\alpha+\beta<2$

$\therefore m+n=\frac{4}{3}$

16. 이차방정식 $2x^2 - 2ax + 12 = 0$ 의 두 근의 비가 $2 : 3$ 이 되는 a 의 값은?

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

두 근을 각각 $2k,\ 3k(k \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2(x-2k)(x-3k) &= 2x^2 - 10kx + 12k^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + 12 \end{aligned}$$

$\therefore\ k = \pm 1$

$10k = 2a$ 이므로

$k = 1$ 일 때 $a = 5$

$k = -1$ 일 때 $a = -5$

$\therefore\ a = \pm 5$

17. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근을 구하는데 소연은 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 1 \pm \sqrt{2}$가 나왔고, 소희는 상수항을 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x=2 \pm \sqrt{6}$이 나왔다. 이 때, ab의 값은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $x^2+ax+b=0$의 두근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b이다.
소연이는 상수항은 제대로 본 것이므로 소연이가 구한 두 근의 곱은
$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1=b$
한편, 소희는 일차항을 제대로 본 것이므로 소희가 구한 두 근의 합은
$(2+\sqrt{6})+(2-\sqrt{6})=-a$
$\therefore\ a=-4,\ b=-1$
$\therefore ab=4$

해설

소연이 푼 식은
$\left\{x-(1+\sqrt{2})\right\}\left\{x-(1-\sqrt{2})\right\}=0$
소연이는 상수항을 제대로 본 것이므로 구하는 상수항 $b = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$
소희가 푼 식은
$\left\{x-(2+\sqrt{6})\right\}\left\{x-(2-\sqrt{6})\right\}=0$
소희는 일차항의 계수를 제대로 본 것이므로 일차항의 계수는
$a=-2+\sqrt{6}-2-\sqrt{6}=-4$
따라서, 처음 이차방정식은 $x^2-4x-1=0$
$\therefore\ ab=4$

18. 세 자리 자연수가 있다 각 자리의 수의 합은 10이고, 가운데 자리의 수의 4배는 다른 두 자리의 수의 합과 같다.
또, 이 자연수의 각 자리의 수를 거꾸로 늘어놓아 얻은 자연수는 처음 자연수보다 198만큼 크다. 처음 자연수는?

① 235　② 325　③ 532　④ 523　⑤ 358

해설

일, 십, 백의 자리의 수를 각각 p, q, r라 하면
p, q는 0이상 10미만의 정수이고
r은 1이상 10미만의 자연수이다.

$$\begin{cases} p+q+r=10 \cdots ㉠ \\ 4q=p+r \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡에서 $q=2$
$100p+20+r=100r+20+p+198$
$p-r=2 \cdots ㉢$
$q=2$를 ㉠에 대입하면 $p+r=8 \cdots ㉣$
㉢ + ㉣에서 $p=5$, $r=3$
따라서 구하는 수는 325이다.

19. 4 월 중 2 박 3 일 동안 봉사활동을 하는데 봉사활동의 둘째 날의 날짜의 제곱은 나머지 2 일의 날짜의 합과 같다. 봉사활동이 끝나는 날의 날짜는?

① 4 월 1 일 ② 4 월 2 일 ③ 4 월 3 일

④ 4 월 4 일 ⑤ 4 월 5 일

해설

봉사활동을 하는 날을 $x-1,\ x,\ x+1$ 이라 하면

$x^2=(x-1)+(x+1)$

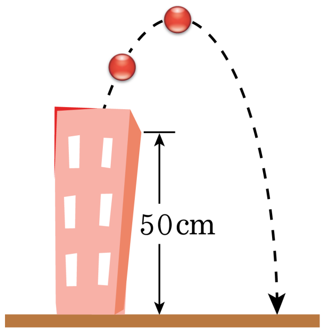
$x^2=2x$

$x(x-2)=0$

$x>0$ 이므로 $x=2$ (일)

따라서 봉사활동이 끝나는 날은 하루 뒤인 4 월 3 일이다.

20. 지면으로부터 50m 되는 높이에서 초속 25m 로 위에 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 t 와 h 사이에는 $h = -5t^2 + 25t + 50$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 올라가는 최고점의 높이를 구하여라. (단, 단위는 생략)



▶ 답 :

▷ 정답 : 81.25

해설

최고점까지 걸린 시간은 옥상의 높이와 같은 50m 를 지날 때의 시간의 절반이므로

$-5t^2 + 25t + 50 = 50$

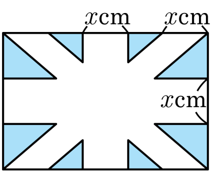
$t = 5$

따라서 최고점까지 걸린 시간은 2.5 초이다.

최고점까지의 거리는 물체가 2.5 초만큼 움직인 거리이므로

$h = -5t^2 + 25t + 50 = 81.25(\mathrm{m})$

21. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 $12\,\text{cm}^2$ 가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



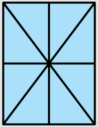
① 2 cm　　② 3 cm

③ 4 cm　　④ 2 cm 또는 7 cm

⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9-3x$, 세로가 $6-x$인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9-3x)(6-x)=12$



정리하면 $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

$x<3$이므로 $x=2$

22. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프는 점 $(a,\ 12)$ 를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다. 이 때, ab 의 값은?

① ± 2 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 6 ⑤ ± 7

해설

$y = 3x^2$ 에 $(a,\ 12)$ 를 대입하면 $a = \pm 2$ 이다.
x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 $b = -3$ 이다.
$\therefore ab = \pm 6$

23. 이차함수 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 m 만큼 평행이동하면 점 $(\sqrt{3},\ -5)$ 를 지난다고 할 때, m 의 값은?

① 4　② 5　③ -5　④ -3　⑤ -2

해설

$y=-\frac{2}{3}x^2+m$ 에 점 $(\sqrt{3},\ -5)$ 를 대입하면

$-5=-\frac{2}{3}(-\sqrt{3})^2+m$

$\therefore m=-3$

24. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\dfrac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

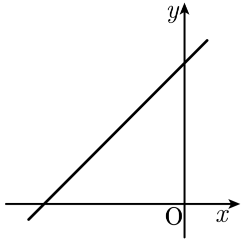
$y = x^2 - ax + b = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + b$,

꼭짓점 $\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4} + b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\dfrac{a^2}{4} + b = 0$,

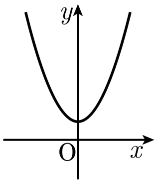
$b = \dfrac{a^2}{4}$,

$\dfrac{a^2}{b} = a^2 \times \dfrac{1}{b} = a^2 \times \dfrac{4}{a^2} = 4$

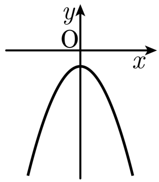
25. 일차함수 $y=ax+b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y=ax^2+b$ 의 그래프의 개형은?



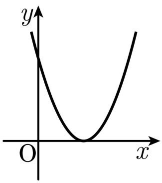
①



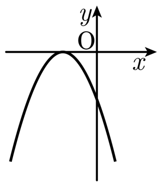
②



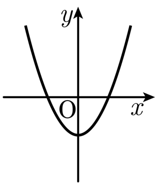
③



④



⑤



해설

$y=ax+b$ 의 그래프에서
$a>0, b>0$ 이다.

26. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$ ㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$ ㉣ $-3(x+2)^2$

㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$ ② $1 < |a| < \frac{3}{2}$ ③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면

㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡ $\frac{1}{2}$ ㉢2 ㉣3 ㉤1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉤, ㉠, ㉢, ㉣ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로

④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

27. 이차함수 $y=-3x^2-6x+2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (a, b) 이고, y 축과의 교점의 y 좌표가 q 일 때, $\dfrac{a+b}{q}$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$y=-3x^2-6x+2$ 의 식을 $y=a(x+p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸면
$y=-3(x^2+2x+1-1)+2$
$y=-3(x+1)^2+5$ 이므로
i) 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 5)$ $\therefore a=-1, b=5$
ii) y 축과 만나는 점의 x 좌표는 0 이므로 $x=0$ 을 대입하면
$q=2$
따라서 $\dfrac{a+b}{q}=\dfrac{(-1)+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ 이다.

28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 점 $(-5, -7)$ 일 때, 이 함수의 그래프가 제4 사분면을 지나지 않기 위해서 a 값이 가질 수 있는 범위는?

① $a \le -\frac{3}{4}$
② $a \ge -\frac{3}{4}$
③ $a \ge \frac{7}{25}$
④ $a \le \frac{7}{25}$
⑤ $0 < a \le \frac{7}{5}$

해설

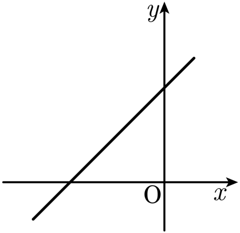
$y = a(x+5)^2 - 7 = ax^2 + 10ax - 7 + 25a$

$(y\text{절편}) \ge 0$

$-7 + 25a \ge 0$

$\therefore a \ge \frac{7}{25}$

29. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?



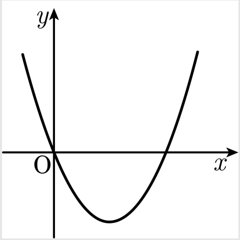
① x 축 위 ② y 축 위

③ 제 1 사분면 ④ 제 2 사분면

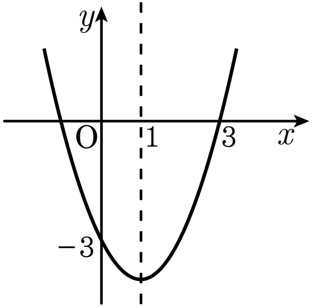
⑤ 제 4 사분면

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점과 축은 y축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



30. 다음 그림은 직선 $x=1$ 을 축으로 하는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프이다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?



① −4 ② −1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$y=a(x-1)^2+q$

$x=0$ 일 때, $a+q=-3 \quad \cdots\cdots (1)$

$x=3$ 일 때, $4a+q=0 \quad \cdots\cdots (2)$

(2) 에서 (1) 을 빼면, $3a=3$

$\therefore\ a=1,\ q=-4$

$y=(x-1)^2-4=x^2-2x-3$

따라서 $x=1$ 일 때, $y=a+b+c=-4$ 이다.

31. 세 점 $(0,\ -4)$, $(1,\ -1)$, $(2,\ 8)$을 지나는 이차함수의 식이 $y=ax^2+bx+c$ 일 때, 이차함수 $y=bx^2+cx+a$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

㉠ 아래로 볼록한 형태의 그래프이다. ㉡ y 절편은 3 이다. ㉢ x 절편은 두 개이다. ㉣ 왼쪽 위를 향하는 포물선 그래프이다. ㉤ 왼쪽 위를 향한다.

① ㉠,㉡ ② ㉡,㉢ ③ ㉡,㉤ ④ ㉢,㉣ ⑤ ㉣,㉤

해설

세 점 $(0,\ -4)$, $(1,\ -1)$, $(2,\ 8)$을 지나므로

$-4=c$

$-1=a+b+c$

$8=4a+2b+c$

세 식을 연립하면, $a=3,\ b=0,\ c=-4$ 이다.

따라서 $y=bx^2+cx+a$ 는

$y=-4x+3$ 이고, 이 함수의 그래프는 y 절편이 3 이고 왼쪽 위를 향하는 직선이다.

32. 이차함수 $y=-3x^2+6x+4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a,\ 2a-7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2+6x+4a \\ &= -3(x-1)^2+3+4a \end{aligned}$$

$y=-3(x-1)^2+3+4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로
$2a-7=-3(-a-1)^2+3+4a$ 을 정리하면 $3a^2+4a-7=0$,
$(3a+7)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{7}{3}\ or\ 1$

그런데 최댓값 $3+4a$ 의 값이 음수이므로 $a=-\frac{7}{3}$ 이다.

33. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3,\ -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1,\ 2)$ 를 대입하면

$2 = 4a - 4$

$\therefore a = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \dfrac{3}{2}x^2 - 9x + \dfrac{19}{2}$

$a = \dfrac{3}{2},\ b = -9,\ c = \dfrac{19}{2}$

$\therefore\ a - b - c = \dfrac{3}{2} - (-9) - \dfrac{19}{2} = 1$

34. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$
$M = k^2 + 4k$ 이므로
$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.
따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

35. 밑면의 길이와 높이의 합이 28 인 삼각형의 넓이가 최대가 될 때 밑변과 높이의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 밑변 : 14

▷ 정답 : 높이 : 14

해설

삼각형의 넓이를 y 라 하면, 밑변을 x , 높이는 $28-x$라 두면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 14x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x + 196 - 196) \\ &= -\frac{1}{2}(x-14)^2 + 196 \end{aligned}$$

따라서 밑변은 14 , 높이는 14 이다.

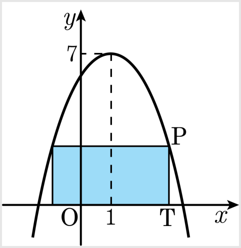
36. 이차함수 $y=-x^2+2x+5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y=-x^2+2x+5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t,\ -t^2+2t+5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2+2t+5$ 이다.

$$\begin{aligned}(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1)-t^2+2t+5\} \\ &= 2(-t^2+4t+3) \\ &= -2t^2+8t+6 \\ &= -2(t-2)^2+14\end{aligned}$$

$t=2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

37. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t-5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후　② 7 초 후　③ 8 초 후

④ 10 초 후　⑤ 알 수 없다.

해설

$y=50t-5t^2$

$y=-5(t^2-10t+25-25)=-5(t-5)^2+125$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.

38. 이차방정식 $2x^2+bx+c=0$ 의 근을 $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ 이라 할 때, 이차방정식 $2x^2-bx-c=0$ 의 두 근의 합은?

① $-\frac{3}{2}$　② -3　③ -4　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 1

해설

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8c}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ 이므로

$b=3,\ c=-1$

$\therefore\ 2x^2-3x+1=0,\ (2x-1)(x-1)=0$

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 합은 $\frac{3}{2}$ 이다.

39. 이차방정식 $x^2-6x+(a-1)=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a 값을 모두 더한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x^2-6x=-a+1,\ x^2-6x+9=-a+10,\ (x-3)^2=-a+10$

$x-3=\pm\sqrt{-a+10},\ x=3\pm\sqrt{10-a}$

두 근이 정수가 되려면 $10-a$ 가 제곱수가 되어야 하므로

$10-a=9,4,1$ 에서 $a=1,6,9$

a값 들의 합은 $1+6+9=16$이다.

40. $\frac{1}{2xy}+\frac{5y-1}{x}+\frac{x}{2y}-3=0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=3$

▷ 정답 : $y=1$

해설

$\frac{1}{2xy}+\frac{5y-1}{x}+\frac{x}{2y}-3=0$을 정리하면

$x^2-6yx+10y^2-2y+1=0\ \cdots$ ㉠

근의 공식에서

$x=3y\pm\sqrt{9y^2-10y^2+2y-1}$

$\therefore\ x=3y\pm\sqrt{-y^2+2y-1}$

이때, x, y 는 실수이므로 $-y^2+2y-1\geq 0$ 이어야 한다.

즉, $y^2-2y+1=(y-1)^2\leq 0$

$\therefore\ y=1$

㉠ 에서 $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$\therefore\ x=3$

따라서 $x=3$, $y=1$ 이다.

41. 정수 m, n 에 대하여 이차방정식 $(m+1)x^2+2x+n+3=0$ 이 중근을 가질 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\frac{D}{4}=1-(m+1)(n+3)=0$$

$mn+m+n+2=0$

$(m+1)(n+1)=-1$

$(m+1,\ n+1)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$

$m=0,\ -2$

따라서 m 의 최댓값은 0 이다.

42. 이차방정식 $x^2-6x+3=0$ 의 두 근이 p, q 라 할 때, $\sqrt{p^4+p^2q^2+q^4}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $9\sqrt{11}$

해설

$p^4+p^2q^2+q^4=(p^2+pq+q^2)(p^2-pq+q^2)$

$p+q=6,\ \ pq=3$

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=36-6=30$

$$(p^2+pq+q^2)(p^2-pq+q^2)=(30+3)(30-3)$$
$$=891$$

$\therefore\ \sqrt{p^4+p^2q^2+q^4}$

$=\sqrt{(p^2+pq+q^2)(p^2-pq+q^2)}$

$=\sqrt{891}$

$=9\sqrt{11}$

43. $\dfrac{13}{5-2\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 m , 소수 부분을 n 이라 할 때, n 은 이차방정식 $\dfrac{m}{4}x^2+ax-b=0$ 의 한 근이다.
이때, 유리수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$\dfrac{13}{5-2\sqrt{3}}=5+2\sqrt{3}=8.\times\times\times$ 이므로 정수 부분 $m=8$, 소수 부분 $n=-3+2\sqrt{3}$
n 이 한 근이므로 $-3-2\sqrt{3}$ 도 한 근이다.
두 근의 합은 -6 , 두 근의 곱은 -3
$\dfrac{m}{4}x^2+ax-b=0 \leftrightarrow 2x^2+ax-b=0$
$a=12,\ b=6$
$\therefore ab=72$

44. 지면에서 10m/s 의 속도로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이 h가 된다. 이때, $h = 5(5t - t^2)$ 이라면 공이 10m 이상의 높이에서 머무르는 시간은 몇 초인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▷ 정답 : $\sqrt{17}$ 초

해설

공의 높이가 10m 일 때이므로 $h = 10$ 을 대입하면

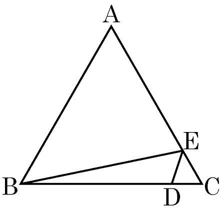
$10 = 5(5t - t^2)$

$t^2 - 5t + 2 = 0$

$\therefore \ t = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

따라서 $\dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}$ 초 후에 공이 10m 를 지나 올라갔다가 $\dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$ 초 후에 높이 10m 를 지나 떨어지므로 공이 10m 이상의 높이에서 머무는 시간은 $\dfrac{5 + \sqrt{17}}{2} - \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$ (초) 동안이다.

45. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6 인 정삼각형에서 $\angle BED = 60°$, $\overline{CD} = 1$ 일 때, 선분 AE의 길이를 구하여라. (단, $\overline{AE} > 3$)



▶ 답 :

▷ 정답 : $3 + \sqrt{3}$

해설

$\triangle ABE \backsim \triangle CED$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB} : \overline{CE} = \overline{AE} : \overline{CD}$

$\overline{AE} = x$ 라 놓으면

$6 : (6 - x) = x : 1$

$\therefore\ 6x - x^2 = 6,\ x^2 - 6x + 6 = 0$

$\therefore\ x = 3 + \sqrt{3}\ (\because\ x > 3)$

46. 밑면의 반지름의 길이가 7cm 이고 높이가 $h$cm 인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름의 길이를 조금 줄였더니 원기둥의 부피가 처음보다 64% 감소했을 때, 줄인 반지름의 길이는?

① 2.5cm ② 2.6cm ③ 2.7cm

④ 2.8cm ⑤ 2.9cm

해설

반지름의 줄인 길이를 $x$cm 라 하면

원래 원기둥의 부피는 $7^2\pi h$ cm

나중 원기둥의 부피는 $(7-x)^2\pi h$ cm

부피가 64% 감소했으므로

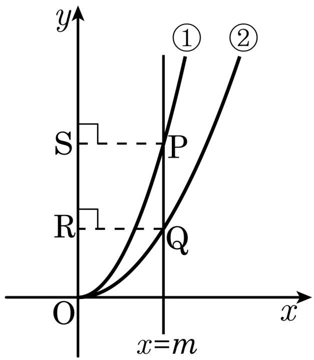
$(7-x)^2\pi h = 0.36\times 7^2\pi h$

$(7-x)^2 = (0.6\times 7)^2$

$x>0$ 이므로 $7-x=4.2$

$\therefore x = 2.8(\text{cm})$

47. 다음 그림은 이차함수 $y=\frac{3}{4}x^2(x\geq 0)\cdots$①, $y=\frac{1}{3}x^2(x\geq 0)\cdots$②의 그래프이다. y축에 평행한 직선 $x=m(m>0)$이 ①과 만나는 점을 P, ②와 만나는 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 y축에 내린 수선이 y축과 만나는 점을 각각 S, R이라 할 때, □PQRS가 정사각형이 되는 m의 값을 구하면?



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{13}{5}$

해설

□PQRS가 정사각형이 되려면

$\frac{3}{4}m^2-\frac{1}{3}m^2=m$이어야 한다.

이것을 풀면 $\frac{5}{12}m^2=m$

따라서 $m>0$이므로 $m=\frac{12}{5}$이다.

48. 두 이차함수 $y=-3x^2+6x+5$, $y=-3x^2+12x-4$ 의 그래프가 $y=p$ 와 만나는 두 점을 각각 A, B 와 C, D 라 하고 y 축과 만나는 점을 각각 E, F, 직선 $x=q$ 와 만나는 점을 각각 G, H 라 할 때, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}+\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ 의 값을 구하여라. (단, $p<0$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$y=-3x^2+6x+5$ 는 $y=-3(x-1)^2+8$
$y=-3x^2+12x-4$ 는 $y=-3(x-2)^2+8$ 이므로
$y=-3x^2+12x-4$ 의 그래프는 $y=-3x^2+6x+5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 두 그래프의 폭이 같다.
$\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{EF}=\overline{GH}$
$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}+\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}=2$

49. 이차함수 $y = 4x^2$의 그래프 위의 점 P와 점 Q는 좌표의 y값이 같다. 두 점 P와 Q 그리고 A(3, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQA의 넓이가 32일 때, 점 P와 점 Q의 y 좌표값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ 4a^2)$이라 하면 점 Q 의 좌표는 $(-a,\ 4a^2)$ 이므로

삼각형 PQA는 밑변이 $2a$, 높이는 $4a^2$ 이다.

$$\triangle\mathrm{PQA} = \frac{1}{2} \times 2a \times 4a^2 = 4a^3 = 32$$

$\therefore\ a = 2$

따라서 점 P 와 점 Q 의 y 좌표값은 16이다.

50. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ 일 때, $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{379}{50}$

해설

$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2=k$ 라 하면

$x+2=2k,\ y+1=3k,\ z-2=k$

이를 $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ 에 대입하면

$(5k-3)^2+(4k+1)^2+(3k)^2$

$=50k^2-22k+10$

$=50\left(k-\frac{11}{50}\right)^2+\frac{379}{50}$

따라서 $k=\frac{11}{50}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{379}{50}$ 이다.