

1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$$

$$= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i$$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

$$(i) \quad x^2 - x - 2 = 0 \text{ 에서 } (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$(ii) \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0 \text{ 에서 } (x-1)(x-2) \neq 0$$

$$\therefore x \neq 1 \text{ 또는 } x \neq 2$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

2. 실수 x, y 에 대하여, 등식 $2x + y + (x - 3y)i = 3 + 2i$ 가 성립할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x + y = 3, x - 3y = 2$ 이므로

$$x = \frac{11}{7}, y = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{11}{7} \times -\frac{7}{1} = -11$$

3. $x = 1 + 2i$, $y = \frac{1 + 2i}{1 - i}$, $z = \frac{1 - 2i}{1 - i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$

② $-1 - 2i$

③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$

⑤ $-1 + i$

해설

$$x = 1 + 2i, y = \frac{1 + 2i}{1 - i}, z = \frac{1 - 2i}{1 - i}$$

$$\begin{aligned}\therefore xy + xz &= \frac{(1 + 2i)^2}{1 - i} + \frac{(1 - 2i)(1 + 2i)}{1 - i} \\ &= \frac{-3 + 4i + 5}{1 - i} \\ &= \frac{2 + 4i}{1 - i} \\ &= -1 + 3i\end{aligned}$$

4. $(1+i)^{10}$ 의 값은?

① $10-i$

② $4i$

③ $8i$

④ $16i$

⑤ $32i$

해설

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \{(1+i)^2\}^5 = (1+2i+i^2)^5 \\ &= (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i\end{aligned}$$

5. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\therefore j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$$

6. $z = 1 - i$ 일 때, $\frac{\bar{z} - 1}{z} - \frac{z - 1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$

② i

③ $-2i$

④ $2i$

⑤ 1

해설

$$z = 1 - i, \bar{z} = 1 + i$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{i}{1 - i} - \frac{-i}{1 + i} = \frac{2i}{2} = i$$

7. $\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1 - \sqrt{2}$

② $-1 - \sqrt{2}$

③ $(1 + \sqrt{2})i$

④ $-(1 + \sqrt{2})i$

⑤ $(1 - \sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2} - \sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2} + 1) \times (-i) \\ &= -(1 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

8. 복소수 $z = (1 + i)x^2 + x - (2 + i)$ 가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1

② 1

③ 1

④ 2

⑤ 2

해설

복소수 z 를 $a + bi$ (a, b 는 실수)의 꼴로 정리하면

$$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$$

이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.

$$\text{즉, } x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$$

한편, $x = 1$ 이면 $z = 0 + 0i = 0$ 이므로

$z \neq 0$ 라는 조건에 맞지 않는다.

$$\therefore x = -1$$

9. 복소수 $(1+i)x^2 - (2+i)x - 3 - 2i$ 를 제공하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x 의 값은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(\text{준식}) = x^2 - 2x - 3 + (x^2 - x - 2)i$$

이것을 제공해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \cdots \textcircled{\text{㉠}}, \quad x^2 - x - 2 \neq 0 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} \text{에서 } x = 3, x = -1$$

이 중에서 $\textcircled{\text{㉡}}$ 를 만족하는 것은 $\therefore x = 3$

10. x, y 가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$xy - 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore x + y = 3 \quad (\because x, y \text{ 는 양의 실수})$$

11. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

$$(1 - 2xi)(2 - yi) = 6 - 2i \quad (\text{단, } x > 0)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(2 - 2xy) - (4x + y)i = 6 - 2i$$

$$2 - 2xy = 6, \quad 4x + y = 2$$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1(x > 0), \quad y = -2$$

12. $(i-1)x^2 - 3(a+i)x + (5+2i) = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값을 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값을 구하면($\alpha > \beta$) ?

① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$$(i-1)x^2 - 3(a+i)x + (5+2i) = 0$$

$$(-x^2 - 3ax + 5) + (x^2 - 3x + 2)i = 0$$

$$-x^2 - 3ax + 5 = 0 \cdots \textcircled{a}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \cdots \textcircled{b}$$

⑥을 인수분해하면,

$$(x-1)(x-2) = 0, \therefore x = 1, 2$$

⑥에 대입하면,

$$x = 1 \text{ 일 때, } -1 - 3a + 5 = 0, \therefore a = \frac{4}{3}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } -4 - 6a + 5 = 0, \therefore a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{1}{6} (\because \alpha > \beta)$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

13. n 개의 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 는 $1, -1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 중에서 하나의 값을 가진다고 한다. 보기 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ 이라고 할 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

㉠ 300

㉡ 303

㉢ 305

㉣ 308

㉤ 310

해설

$a_1, a_2, \cdots a_n$ 중 1이 a 개, -1 이 b 개, $\sqrt{2}i$ 가 c 개, $-\sqrt{2}i$ 가 d 개 있다고 하면, a, b, c, d 는 음이 아닌 정수

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= 1 \times a + (-1) \times b + (\sqrt{2}i) \times c + (-\sqrt{2}i) \times d$$

$$= a - b + \sqrt{2}i(c - d) = 0$$

a, b, c, d 는 실수이므로 $a - b, c - d$ 도 실수

복소수의 상등에 의해 $a = b, c = d \cdots ①$

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

$$= 1^2 \times a + (-1)^2 \times b + (\sqrt{2}i)^2 \times c + (-\sqrt{2}i)^2 \times d$$

$$= a + b - 2c - 2d = (a + b) - 2(c + d) = 0$$

$$a + b = 2(c + d)$$

$$2a = 4c (\because ①)$$

$$\therefore a = 2c$$

$$\therefore a : b : c : d = 1 : 1 : 2 : 2$$

$$\therefore n = a + b + c + d = 6a, n \text{ 은 } 6 \text{ 의 배수}$$

14. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right) \\ &= f(i^2) + f((-i)^2) \\ &= f(-1) + f(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

15. 정수 n 에 대하여, $z = i^n + \frac{1}{i^n}$ 을 만족하는 실수의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$z = i^n + \frac{1}{i^n} \text{에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } i + \frac{1}{i} = i - i = 0$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } -i + \frac{1}{-i} = 0$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } 1 + \frac{1}{1} = 2$$

따라서, $z = -2, 0, 2$ 이므로 3개이다.

16. 유리수 a, b, c, d 에 대하여 $(\sqrt{2} + i)^4 + a(\sqrt{2} + i)^3 + b(\sqrt{2} + i)^2 + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$ 을 만족한다. 이 때, $a - b - c - d$ 의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7

② 3

③ 1

④ -1

해설

$$(\sqrt{2} + i)^4 = -7 + 4\sqrt{2}i, (\sqrt{2} + i)^3 = -\sqrt{2} + 5i,$$

$$(\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$$

$$(-7 + 4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2} + 5i)$$

$$+ b(1 + 2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$$

$$(-7 - \sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d)$$

$$+ (4\sqrt{2} + 5a + 2\sqrt{2}b + c)i = 0$$

$$\therefore (-7 + b + d) + (c - a)\sqrt{2} = 0,$$

$$(5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2} = 0$$

a, b, c, d 는 유리수이므로 $-7 + b + d = 0$:

$$c - a = 0, 5a + c = 0, 4 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 0, b = -2, c = 0, d = 9$$

$$\therefore a - b - c - d = -7$$

17. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1

② $1-i$

③ $1+i$

④ -1

⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

18. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

㉤ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\alpha = \bar{\beta} \text{이므로 } \beta = a - bi$$

$$\therefore \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$\therefore \alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 실수이다.

㉡ : ㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b 는

실수이므로 $a = 0, b = 0$ 즉, $\alpha = a + bi = 0$ 이다.

㉢ : (반례) $\alpha = i, \beta = 1$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$$

㉤ : (반례) $\alpha = 1, \beta = i$

$$\therefore \alpha + \beta i = 0$$

$\therefore$ ㉢, ㉤는 α, β 가 실수일 때만 성립한다.

19. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

- ㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
 ㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다.
 ㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다.
 ㉤ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
 ㉥ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$$

$$\text{㉠ } z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow \text{실수}$$

$$\text{㉡ } z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$$

$\therefore z = bi \Rightarrow \text{순허수} (\because z \neq 0 \text{ 이므로 } b \neq 0)$

$$\text{㉢ } z + \bar{z} = 2a \Rightarrow \text{실수}$$

$$\text{㉤ } z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우
 $z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.

$$\text{㉥ } \frac{1}{z} = c + di \text{ 라면 } \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\overline{1}}{\bar{z}} = c - di \text{ 이므로 참}$$

20. $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② -1

③ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ 1

⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \bar{z} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2z + 1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$$z^2 + z + 1 = 0, (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\therefore z^3 = 1, \bar{z}^3 = 1$$

$$z^{2005} + \bar{z}^{2005} = (z^3)^{668} \cdot z + (\bar{z}^3)^{668} \cdot \bar{z}$$

$$= z + \bar{z}$$

$$= -1$$

21. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^3 + 5x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

② $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

③ $\frac{5}{2}(2 \pm \sqrt{3}i)$

④ $\frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$

⑤ $\frac{9}{2}(4 \pm \sqrt{3}i)$

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= 3x \\&= \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)\end{aligned}$$

22. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$2\alpha = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$$

$$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4$$

$$= 4$$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$$

$$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4$$

$$= 4 (\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$$

23. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$

② $-i$

③ i

④ -1

⑤ 1

해설

$$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$$

$$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$$

$$= -x^2 - x - 1 \quad (\because x^2 + 2x + 2 = 0)$$

$$= -(-2x - 2) - x - 1$$

$$= x + 1 = i$$

24. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$ 인 a, b, c 에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$ 의 값은?

① $2a$

② $2b$

③ $-2c$

④ $-2a$

⑤ $-3b$

해설

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이므로, } a \leq 0, b \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{ 이므로, } b < 0, c \geq 0$$

$$|a+b| > |c| \text{ 이므로, } -(a+b) > 0$$

$$\therefore a+b+c < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c \end{aligned}$$

25. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} + (i)^{50} \\ &= (-i)^2 + (i)^2 \\ &= -2\end{aligned}$$

26. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots \textcircled{1}$, $y^2 - x = i \cdots \textcircled{2}$ 에서

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 : $(x + y)(x - y) + (x - y) = 0$,

$$(x - y)(x + y + 1) = 0$$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x + y)^2 - 2xy - (x + y) = 2i$

$$\therefore xy = 1 - i$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= (-1)^3 - 3(1 - i)(-1)$$

$$= 2 - 3i$$

27. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 모두 고르면? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

㉠ $(z+1)^2$

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z$

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)+((\bar{z})^2+\bar{z}+1)(z+1)$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2 = (i+1)^2 = 2i$
(허수)

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z = 2z\bar{z} + (z+\bar{z}) + 1$ (실수)
($\because z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1) = Z$ 라 하면
(준식) $= Z + \bar{Z}$ 이므로 실수
따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.

28. 복소수 α, β 는 $\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② 3

③ 2

④ 1

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$\alpha + \beta = i \text{에서 } \overline{\alpha + \beta} = \bar{i} \quad \therefore \bar{\alpha} + \bar{\beta} = -i$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1, \beta\bar{\beta} = 1 \text{에서 } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$$

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \quad \therefore \alpha\beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$$

29. 방정식 $(2 + 3i)z + (2 - 3i)\bar{z} = 2$ 를 만족시키는 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.

② 한 개 있다.

③ 두 개뿐이다.

④ 무수히 많이 있다.

⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면,

$(2 + 3i)z + (2 - 3i)\bar{z} = 2$ 에서

$$(2 + 3i)(a + bi) + (2 - 3i)(a - bi) = 2$$

$$2(2a - 3b) = 2$$

$\therefore 2a - 3b = 1$ 을 만족하는 실수 a, b 의 쌍은 무수히 많다.

30. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99} + \beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을

이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \beta^2 - \beta + 1 = 0$$

두 식에 각각 $\alpha + 1, \beta + 1$ 를 곱하면

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0, (\beta + 1)(\beta^2 - \beta + 1) = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$$

$$\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$$

해설

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$ 이므로

α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^3 + 1) = 0$$

$$\alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$$

$$\therefore \alpha^{99} + \beta^{99} = (\alpha^3)^{33} + (\beta^3)^{33} = -1 - 1 = -2$$