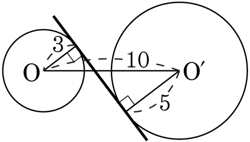
1. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2-(3+5)^2}=6$

2. 점 $(2,\ -3)$을 점 $(-1,\ 2)$로 옮기는 평행이동을 T라 할 때, 점 $(-2,\ 5)$는 T에 의하여 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(1,\ 0)$　　② $(-5,\ 10)$　　③ $(-3,\ 5)$

④ $(5,\ 10)$　　⑤ $(3,\ -5)$

해설

평행이동 T는 x축의 방향으로 -3, y 축의 방향으로 $+5$ 만큼 평행이동 하는 변환이므로
$(-2-3,\ \ 5+5)=(-5,\ 10)$으로 옮겨진다.

3. 직선 $y = 3x - 3$ 의 그래프를 직선 $y = x$에 대칭이동한 직선의 방정식은?

① $y = 3x + 1$ ② $y = \frac{1}{3}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{3} + 1$

④ $y = \frac{1}{3}x - 1$ ⑤ $y = 3x - 1$

해설

$y = x$대칭은 $x \to y$좌표로, $y \to x$를 대입한다.

4. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0$,

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times 3\times 1=-3$

5. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 이 중근을 가질 때, 실수 a 의 값들의 합을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 에서

ⅰ) 1이 중근일 경우

$x^2-ax+2a=0$ 에 $x=1$ 을 대입하면 성립해야 하므로

$1-a+2a=0$, $a=-1$

ⅱ) 1이 중근이 아닌 경우

$x^2-ax+2a=0$ 이 중근을 가지므로 판별식 $D=0$ 에서

$D=a^2-8a=0,\ a(a-8)=0,\ a=0, 8$

$\therefore\ 0+8-1=7$

6. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르시오.

보 기

㉠ $(1+\omega^2)^3 = -1$

㉡ $(1+\omega)^{10} = \omega^2$

㉢ 모든 자연수 n에 대하여 $(1+\omega)^{3n} = (-1)^n$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x^3 = 1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉠ $\omega^2 + 1 = -\omega$,

$(\omega^2+1)^3 = (-\omega)^3 = -\omega^3 = -1(\bigcirc)$

㉡ $(1+\omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$

$= \omega^{20} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 = \omega^2(\bigcirc)$

㉢ $(-\omega^2)^{3n} = (-1)^{3n} \cdot (\omega^3)^{2n}$

$= (-1)^n \cdot 1^{2n} = (-1)^n$

$(\because\ (-1)^{3n} = \{(-1)^3\}^n = (-1)^n)\ (\bigcirc)$

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참

7. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$

$(x-3)(y+2)=4$

$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x-3=1,\ y+2=4$

$\therefore\ x=4,\ y=2$

8. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a>-\dfrac{1}{2}$ ③ $a>-\dfrac{1}{3}$

④ $a>-\dfrac{1}{4}$ ⑤ $a>-\dfrac{1}{5}$

해설

$ax^2+(a+1)x+a>0$에서

i) $a=0$이면 $x>0$

$\therefore$ 실수해가 존재한다.

ii) $a>0$ 이면 $y=ax^2+(a+1)x+a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로

$ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.

iii) $a<0$이면 $D=(a+1)^2-4a^2>0$

$3a^2-2a-1<0$, $(3a+1)(a-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}<a<1$, $a<0$ 이므로 $-\dfrac{1}{3}<a<0$

i), ii), iii)에서 $a>-\dfrac{1}{3}$

9. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+(k+2)x-(2k+1)\le 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\le 0$ 또는 $k\ge 4$

② $0\le k\le 4$

③ $k\le -1$ 또는 ≥ 1

④ $-1\le k\le 1$

⑤ $0\le k\le 3$

해설

$-x^2+(k+2)x-(2k+1)\le 0$ 에서 $x^2-(k+2)x+(2k+1)\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

이차함수 $y=x^2-(k+2)x+(2k+1)$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-(k+2)x+(2k+1)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

$D=(k+1)^2-4(2k+1)\le 0$

$k^2-4k\le 0$

$k(k-4)\le 0$

$\therefore\ 0\le k\le 4$

10. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 2x^2 + (7-2a)x - 7a < 0 \end{cases}$

을 만족하는 정수가 -3한 개뿐일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-3 < a \le 3$ ② $-3 < a \le 2$ ③ $-2 < a \le 7$

④ $0 < a \le 7$ ⑤ $7 < a \le 10$

해설

$x^2 - 4 > 0$에서

$(x+2)(x-2) > 0$

$\therefore x < -2$ 또는 $x > 2 \cdots$ ㉠

$2x^2 + (7-2a)x - 7a < 0$에서

$(2x+7)(x-a) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 동시에 만족하는 정수가

-3뿐이어야 하므로

a가 취할 수 있는 범위는 $-3 < a \le 3$이다.

11. △ABC 에서 변 AB, BC, CA 의 중점이 각각 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(0,\ 3)$ 일 때, 점A 의 좌표를$(x_1,\ \ y_1)$ 이라 할 때, x_1+y_1 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 라 하면

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2$ 즉, $x_1+x_2=-4\cdots$ ①

$\dfrac{x_2+x_3}{2}=3$ 즉, $x_2+x_3=6\cdots$ ②

$\dfrac{x_1+x_3}{2}=0$ 즉, $x_1+x_3=0\cdots$ ③

① + ② + ③ 하면 $x_1+x_2+x_3=1$

$\therefore\ x_1=-5,\ \ x_2=1,\ \ x_3=5$

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=0$ 즉, $y_1+y_2=0\cdots$ ④

$\dfrac{y_2+y_3}{2}=1$ 즉, $y_2+y_3=2\cdots$ ⑤

$\dfrac{y_1+y_3}{2}=3$ 즉, $y_1+y_3=6\cdots$ ⑥

④ + ⑤ + ⑥ 하면 $y_1+y_2+y_3=4$

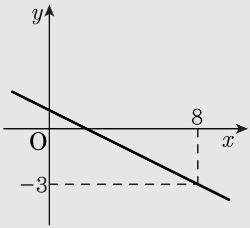
$\therefore\ y_1=2,\ \ y_2=-2,\ \ y_3=4$

따라서, $x_1+y_1=-3$

12. 점 $(8, -3)$을 지나고, x축, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1인 직선의 방정식으로 알맞은 것은?

① $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$　② $\frac{x}{2}+y=1$　③ $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$
④ $x+\frac{y}{3}=1$　⑤ $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$

해설



x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(8, -3)$을 지나므로

$\frac{8}{a}+\frac{(-3)}{b}=1 \cdots$ ㉠

두 좌표축과 직선이 이루는 삼각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ab=1 \cdots$ ㉡

㉡에서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}b$

이것을 ㉠에 대입하면 $8\times\frac{1}{2}b-\frac{3}{b}=1$에서

$4b^2-b-3=0 \quad \therefore \ (4b+3)(b-1)=0$

$b>0$이므로 $b=1 \quad \therefore \ a=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+y=1$

13. 점 $(3,\ 4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$\dfrac{|2\times3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

14. x 축에 접하고 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$
② $x^2+(y-5)^2=169$
③ $x^2+(y-5)^2=25$
④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$
⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 $(a,\ b)$ 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서
$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0 \quad \therefore \quad a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는
$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

15. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$ 까지의 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 의 자취의 길이는?

① $\frac{5}{3}\pi$　② 2π　③ $\frac{8}{3}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{10}{3}\pi$

해설

좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$ 까지의 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 의 자취는

$(-3, 0)$ 과 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ 을 지름의 양 끝으로

하는 원이다.

즉 반지름이 $\frac{2}{3}$ 이 원의 둘레의 길이는 $\frac{8}{3}\pi$ 이다.

16. $A(-2, 1)$과 점 $B(2, -1)$을 각각 지나는 임의의 두 직선은 항상 서로 직교한다.
이 때, 만나는 점 P의 자취의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{5}$　② $3\sqrt{5}\pi$　③ $2\sqrt{5}\pi$　④ $2\sqrt{3}\pi$　⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 이므로 교점 P는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.
그러므로 점 P의 자취의 길이는 $\overline{AB} \times \pi$이다.
$\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $2\sqrt{5}\pi$이다.

17. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$

$|a - 1| = 10$

$a - 1 = \pm 10$

$a > 0$ 이므로 $a = 11$

18. 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ 가 점 B 로 옮겨질 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 4\sqrt{2}$ 이고 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에 이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다. 이때, mn 의 값은?

① -4　　② -2　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

해설

점 $\mathrm{A}(1, 2)$ 를 x 축 방향으로 m 만큼,
y축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점 B 는
$\mathrm{B}(1+m, 2+n)$ 이고,
선분 AB 의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로
$\sqrt{m^2+n^2} = 4\sqrt{2}$　　$\therefore m^2+n^2 = 32$
또한, 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에
이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|1+m+2+n-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$

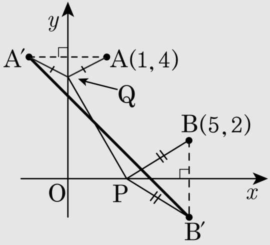
$\therefore |m+n| = 6$
이 식의 양변을 제곱하면
$m^2+2mn+n^2 = 36$
이 때, $m^2+n^2 = 32$ 이므로
$2mn = 36-32 = 4$　　$\therefore mn = 2$

19. 두 점 $A(1, 4), B(5, 2)$에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$　　② $3\sqrt{2}$　　③ $4\sqrt{2}$　　④ $5\sqrt{2}$　　⑤ $6\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면



$A'(-1, 4), B'(5, -2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP} &= \overline{A'Q}+\overline{PQ}+\overline{B'P} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2} \\ &= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

20. 두 점 $A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{3}$　② $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{8} < t < \frac{5}{6}$

해설

$A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 을 $t:1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t\cdot(-5)+(1-t)\cdot 3}{t+1-t}, \frac{t\cdot 1+(1-t)\cdot(-2)}{t+1-t}\right)$$

$$=(-5t+3-3t, t-2+2t)=(-8t+3, 3t-2)$$

이 점이 제3 사분면에 있으므로

$-8t+3<0$, $8t>3$, $t>\frac{3}{8}$

$3t-2<0$, $3t<2$, $t<\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$

21. 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(a,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4 \cdots$ ㉠

$\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$$

$\therefore\ a+2b-1=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{9}{5},\ b=-\dfrac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

22. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$ 이 직선 $y=ax+b$ $\cdots$ ① 에 대하여 대칭이므로
직선 ①은 점 $(-2,1)$ 와 점 $(0,0)$을 수직이등분한다.

따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1이다.

$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$

$\therefore\ a=2, b=\frac{5}{2}$

따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

23. $A = 2(x+m)$, $B = 5x+4n$, $C = 3x-2n$ 에 대하여 연립부등식 $A \le B \le C$ 를 풀었는데, 실수로 m 과 n 의 값을 바꾸어 푸는 바람에 해가 $8 \le x \le 21$ 이 되었다. 이 부등식을 올바르게 풀었을 때의 $A \le B \le C$ 를 만족하는 해의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A = 2(x+m)$, $B = 5x+4n$, $C = 3x-2n$ 에 대하여 $A \le B \le C$ 를 풀면,

$$\begin{cases} 2(x+m) \le 5x+4n & \Rightarrow\ x \ge \dfrac{2}{3}(m-2n) \\ 5x+4n \le 3x-2n & \Rightarrow\ x \le -3n \end{cases}$$

$\dfrac{2}{3}(m-2n) \le x \le -3n$ 에서 잘못하여 m 과 n 의 값을 바꾸어 풀었으므로,

$\dfrac{2}{3}(n-2m) \le x \le -3m$ 이 되고 이 해집합이 $8 \le x \le 21$ 과 동일하므로,

$$\begin{cases} -3m = 21 & \Rightarrow\ m = -7 \\ \dfrac{2}{3}(n-2m) = 8 & \Rightarrow\ n = -2 \end{cases}$$

따라서 올바른 해를 구하면

$\dfrac{2}{3}\{-7-2\times(-2)\} \le x \le -3\times(-2)$ 이 되어

$-2 \le x \le 6$ 이고, 이를 만족하는 해의 최솟값은 -2 이다.

24. 부등식 $1 \le |x-1| < 6$ 을 만족하는 정수 x 중 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$1 \le |x-1| < 6$ 에서

1) $x \ge 1$ 일 때

$1 \le x-1 < 6$, $2 \le x < 7$

$\therefore \ x = 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6$

2) $x < 1$ 일 때

$1 \le -x+1 < 6$, $-5 < x \le 0$

$\therefore \ x = -4, \ -3, \ -2, \ -1, \ 0$

1), 2) 에 의해서 부등식을 만족하는 정수 x 의 최댓값은 6, 최솟값은 -4

최댓값과 최솟값의 합은 $6-4=2$

25. 어떤 삼각형의 세 변의 길이가 긴 변부터 차례로 $4x+5$, $x+12$, $2x-3$ 이고, 세 변의 길이가 모두 자연수일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 3

해설

삼각형의 세 변의 길이 관계는
(가장 긴 변의 길이) < (다른 두 변의 길이의 합) 이어야 하므로
$4x+5<(2x-3)+(x+12)$
$\therefore\ x<4\cdots$ ㉠
또 변의 길이는 양수이어야 하므로
$2x-3>0$
$\therefore\ x>\frac{3}{2}\cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면
$\frac{3}{2}<x<4$
세 변의 길이가 모두 자연수이기 위해서 x 는 정수이어야 하므로
$\therefore\ x=2,\ 3$