1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$	㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

2. x에 대한 이차방정식 $x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2$ ② $-1<k<0$ ③ $-1<k<4$
④ $k<5$ ⑤ $0<k<5$

해설
$x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면
$\frac{D}{4}=9-2k+1>0$ $\therefore 2k<10$ $\therefore k<5$

3. 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 허근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k>4$

해설

$\frac{D}{4}=2^2-k<0$

$\therefore\ k>4$

4. 이차방정식 $5x^2-6x+a-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a의 최솟값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$D'=9-5(a-5)=-5a+34<0$

$\therefore a>\frac{34}{5}$

5. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면

$D=25-4\times3(1-k)<0$

$25-12+12k<0 \quad \therefore 12k<-13$

$\therefore k<-\dfrac{13}{12}$이므로

정수 k의 최댓값은 -2

6. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.
두 근의 합 : 2,
두 근의 곱 : 2
$\therefore\ a=-2\ ,\ b=2$

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \leq 3$ ② $k > 3$ ③ $k \leq 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$

$\therefore\ k > 3$

8. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$
④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$
$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a=0,\ a^2-b+3=0$
$\therefore \quad a=0, b=3$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 다른 한 근은 $1 - 2i$ 이다.
(두 근의 합) $= (1 + 2i) + (1 - 2i) = -a$ ⋯⋯㉠
(두 근의 곱) $= (1 + 2i)(1 - 2i) = b$ ⋯⋯㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡에서
$a = -2,\ b = 5$ 이다.

10. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2-2\sqrt{b}x+(2a+1)=0 \cdots$ ㉠
$x^2-2ax-b=0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=b-(2a+1)>0 \therefore\ b>2a+1$

㉡의 판별식을 D' 이라 하면

$\frac{D'}{4}=a^2+b>a^2+2a+1$

$=(a+1)^2 \geq 0$

$\therefore\ \frac{D'}{4}>0$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

11. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

12. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$　　② $a \geq 4$　　③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$　　⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2 - kx + (2k-a) = 0$

실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.

$k^2 - 4(2k-a) \geq 0$

$k^2 - 8k + 4a \geq 0$

위 부등식을 k에 대하여 정리하면

$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$

실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

판별식 $\frac{D}{4} \leq 0$이거나,

$4a - 16 \geq 0 (\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.

따라서 $a \geq 4$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<0$ ② $k>0$ ③ $0<k<\frac{1}{4}$
④ $k\le 0$ ⑤ $k\ge 0$

해설

$x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이
허근을 가져야 하므로
x에 대한 내림차순으로 정리하면
$kx^2-kx+\frac{1}{4}(k+1)=0$
$D=(-k)^2-4k\cdot\frac{1}{4}(k+1)<0$
$=k^2-k^2-k=-k<0 \quad \therefore k>0$
$\therefore k>0$

14. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

15. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

16. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근 ② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근 ④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$

$=a^2-2a+1+a^2+a$

$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\frac{1}{2}a\right)+1$

$=2\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)+1-\frac{1}{8}$

$=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

17. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

18. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$의 근을 판별하면? (단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} > 0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

19. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

20. x에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$

$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$

$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$\therefore a + b = 0$

21. x에 대한 2차 방정식 $x^2-2ax+a^2+ka-2k+b=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 4　② 8　③ 2　④ -2　⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$\Rightarrow \quad D' = a^2-(a^2+ka-2k+b)=0$

$-ka+2k-b=0$

$k(2-a)-b=0$

$\therefore \quad a=2 \quad b=0 \quad a+b=2$

22. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+3b$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.

$D' = (m+a-2)^2-(m^2+a^2-3b)=0$

$\Rightarrow \quad 2m(a-2)+4-4a+3b=0$

m에 관계없이 성립하려면,

$a=2 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{4}{3}$

$a+3b=6$

23. x에 대한 이차방정식 $4x^2+2(2k+m)x+k^2-k+2n=0$이 임의의 실수 k에 대하여 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하면?

① 3 ② $\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

해설

판별식이 0이어야 한다.

$D' = (2k+m)^2 - 4(k^2-k+2n) = 0$

$\Rightarrow \quad m^2+4km+4k-8n=0$

$\Rightarrow \quad 4k(m+1)+m^2-8n=0$

임의의 k에 대해 성립하려면

$m+1=0, \quad m^2-8n=0$

$\Rightarrow \ m=-1,\ n=\frac{1}{8},\ m+n=-\frac{7}{8}$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b의 값은?

① $a=1,\ b=1$ ② $a=1,\ b=0$

③ $a=0,\ b=1$ ④ $a=-1,\ b=0$

⑤ $a=-1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로,

$(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$-2ak+(b-1)=0$

$\therefore\ a=0, b=1$

25. x에 관한 이차방정식$x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a+3b$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x^2+2\cdot(m+a-2)x+(m^2+a^2-3b)=0$

중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$

$(m+a-2)^2-1\cdot(m^2+a^2-3b)=0$

m에 대한 항등식이므로

정리해서 m으로 묶으면,

$m\cdot(2a-4)+(4-4a+3b)=0$

$a=2, 3b=4a-4=4$

$\therefore\ a+3b=6$

26. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$의 두 근의 비가 $1:3$이 되도록 상수 k의 값을 구하면?

① $\pm 2\sqrt{2}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $\pm 2\sqrt{5}$
④ $\pm 2\sqrt{6}$ ⑤ ± 2

해설

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 3α
$\therefore$ 두 근의 곱은 $3\alpha^2 = 9$ $\therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$
두 근의 합은 $\alpha + 3\alpha = \pm 4\sqrt{3} = 2k$
$\therefore$ $k = \pm 2\sqrt{3}$

27. 이차방정식 $mx^2+(3m-5)x-24=0$의 두 근의 절대값의 비가 $3 : 2$일 때, 양수 m의 값은? (단, m은 정수가 아니다.)

① $\frac{25}{9}$　　② $\frac{23}{9}$　　③ $\frac{8}{3}$　　④ $\frac{7}{3}$　　⑤ $\frac{22}{9}$

해설

두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-\frac{3m-5}{m}$, $\alpha\beta=-\frac{24}{m}$에서

$m>0$이므로 $\alpha\beta<0$

$|\alpha| : |\beta| = 3 : 2$이므로

두 근을 3α, -2α라 하면

$3\alpha+(-2\alpha)=-\frac{3m-5}{m}$, $3\alpha\cdot(-2\alpha)=-\frac{24}{m}$

$\therefore \alpha=-\frac{3m-5}{m}$, $-6\alpha^2=-\frac{24}{m}$

$\left(\frac{3m-5}{m}\right)^2=\frac{4}{m}$, $(9m-25)(m-1)=0$

m은 정수가 아니므로 $m=\frac{25}{9}$

28. 방정식 $x^2 - ax - 2 = 0$의 한 근이 $1+i$일 때, a의 값은?

① -2 ② 2 ③ $-2i$ ④ 1 ⑤ $2i$

해설

다른 한 근을 α라고 하면
두 근의 곱은 $(1+i)\alpha = -2$
따라서 $\alpha = -(1-i) = -1+i$
두 근의 합은 $(1+i)+(-1+i) = a$
$\therefore\ a = 2i$

29. 이차방정식 $x^2-(a+2)x+a=0$의 두 근의 차가 2일 때, 상수 a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=a+2,\ \ \alpha\beta=a$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$4=a^2+4a+4-4a$

$\therefore\ a=0$

30. 어떤 실수 a에 대하여 두 수 $[a]$와 $a-[a]$를 근으로 하는 이차방정식이 $4x^2-7x+k=0$일 때, 상수 k의 값은?(단, $[a]$는 a보다 크지 않는 최대의 정수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$4(x-[a])(x-a+[a]) = 4x^2-4ax+4a[a]-4[a]^2$

$4a=7$이므로 $a=\dfrac{7}{4}$

$[a]=\left[\dfrac{7}{4}\right]=1$

$\therefore k=4a[a]-4[a]^2=7-4=3$

31. 이차방정식 $x^2-2ax+2a+4=0$의 두 근이 모두 정수일 때, 정수 a 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근을 α,β라 하면

$x^2-2ax+2a+4=(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\therefore \alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=2a+4$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=4$

$(\alpha-1)(\beta-1)=5$

α,β는 정수이므로

$\therefore (\alpha,\beta)=(2,6),(6,2),(0,-4),(-4,0)$

$\therefore a=4,-2$

32. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한근이 ω일 때 $x=\dfrac{2}{\omega+1}$가 $x^2+px+q=0$의 근이다. 이 때, 유리수 p, q의 합을 바르게 구한 것은?

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 8

해설

$x^2+x+1=0$ 의 두 근 : $\omega, \overline{\omega}$

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\cdot\overline{\omega}=1$

$x^2+px+q=0$ 의 두 근 : $\dfrac{2}{\omega+1}, \dfrac{2}{\overline{\omega}+1}$

$$-p=\frac{2}{\omega+1}+\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{2(\omega+\overline{\omega})+4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=2$$

$$q=\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=4$$

$p=-2, q=4 \quad \therefore \quad p+q=2$

해설

$x^2+x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$라 하자.

$$\frac{2}{\omega+1}=\frac{2}{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}=1-\sqrt{3}i$$

$\therefore$ 다른 한근은 켤레복소수인 $1+\sqrt{3}i$가 된다.

$p=-$(두근의 합)$=-2$, $q=$(두근의 곱)$=4$

$p+q=2$

33. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ \ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

34. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 한 근이 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$ 이므로,
두 근은 $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$
$p = -$(두근의 합) $= -4$
$q =$ (두근의 곱) $= 1$
$\therefore p+q = -3$

35. 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$일 때 p, q를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차 방정식을 구하면?(단, p, q는 유리수)

① $x^2-x-6=0$ ② $x^2+2x-8=0$

③ $x^2-x-2=0$ ④ $x^2-x-12=0$

⑤ $x^2-2x-3=0$

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$

$\therefore$ $x^2+px+q=0$의 두 근은 $-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$

$-p=(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

$q=(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=-1$

$p=2, q=-1$이므로 $p+q=1$, $pq=-2$

$2, -1$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-x-2=0$

36. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 10　　⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20$,

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a는 5

37. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$
$$= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면

$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고

준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0 이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

38. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2　② -4　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면
$f(x) = x^2 + (1-y)x + (-6y^2 + 7y + k)$
$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면
$D = (1-y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$가 완전제곱식이어야 한다.
$D = 25y^2 - 30y + (1-4k)$에서
$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1-4k) = 0$
$\therefore\ k = -2$

39. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\{1+(a+b)^2\}$

$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2 \geq 0$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1 \leq 0$

즉, $(a+b+1)^2 \leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

40. $x^2+kxy-2y^2+3y-1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

① ±1　② ±2　③ ±3　④ ±4　⑤ ±6

해설

$x^2+kyx-(2y^2-3y+1)=0$ 에서

$D=k^2y^2+4(2y^2-3y+1)$

$\quad=(k^2+8)y^2-12y+4$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\frac{D}{4}=36-4(k^2+8)=0$

$\therefore k=\pm1$

41. $m > 0$이고 이차방정식 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$의 두 근의 절대값의 비가 $3:2$일 때, 정수가 아닌 m의 값은?

① $\frac{25}{9}$　② $\frac{26}{9}$　③ $\frac{28}{9}$　④ $\frac{29}{9}$　⑤ $\frac{31}{9}$

해설

$m > 0$에서 두 근의 곱이 $-\frac{24}{m} < 0$이므로
서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.
따라서, 방정식의 두 근을 $3\alpha,\ -2\alpha$라 놓을 수 있다.
근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3a + (-2\alpha) = -\frac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\frac{24}{m} \end{cases}$$

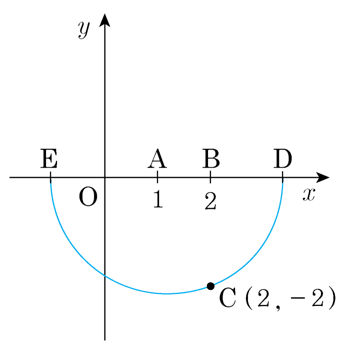
$\therefore\ \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m}$　$\therefore\ (3m-5)^2 = 4m$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1) = 0$

$\therefore\ m = \frac{25}{9},\ 1$

따라서 정수가 아닌 m의 값은 $\frac{25}{9}$이다.

42. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



① A ② B ③ C

④ D ⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$이므로

$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.

$\therefore$ 점 D 의 좌표는 $(1+\sqrt{5},\ 0)$,

점 E 의 좌표는 $(1-\sqrt{5},\ 0)$ 이다.

그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ 의 그래프가 점 E를 지나므로

$x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.

여기서, $a,\ b,\ c$ 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$

($\because$ 켤레근) 또한 방정식의 근이 된다.

따라서, 그래프는 점 $D(1+\sqrt{5},\ 0)$ 을 지난다.