

1. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, -\sqrt{2}, 2i, -2i,$
 $3i, -3i, 1-i, 1+i$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore 2i, -2i, 3i, -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

(실수) $^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

2. $(1 - 3i)x + (3 + 2i)y = 1 + 8i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(1 - 3i)x + (3 + 2i)y = 1 + 8i,$$

$$(x + 3y) + (-3x + 2y)i = 1 + 8i \text{ 에서}$$

복소수의 상등에 의하여

$$x + 3y = 1, \quad -3x + 2y = 8 \text{ 이고}$$

$$\text{연립하여 풀면 } y = 1, \quad x = -2$$

$$\therefore x + y = -1$$

3. $z = \frac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1

② 2

③ -3

④ 4

⑤ -5

해설

$$z = \frac{2}{1-i} = 1+i$$

$$\begin{aligned}\therefore 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= -5\end{aligned}$$

해설

$$z = 1+i, z-1 = i$$

양변을 제곱하고 정리하면

$$z^2 - 2z = -2$$

$$2z^2 - 4z - 1$$

$$= 2(z^2 - 2z) - 1$$

$$= -4 - 1 = -5$$

4. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 모든 실수 m 의 값의 합을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D = 0$

$$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$(m-5)(m+3) = 0 \quad \therefore m = -3, 5$$

$$\therefore m \text{의 값의 합은 } -3 + 5 = 2$$

5. x 에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2kx + k-1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2 의 계수는 $k-1 \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$ 이어야
하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0, \quad 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

6. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x + \frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ 라 하고,}$$

양변에 x 를 곱하면

$$x^2 + 1 = tx$$

$x^2 - tx + 1 = 0$ 에서 x 는 실수이므로

$$D = t^2 - 4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4, t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 2$$

7. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8

② -4

③ -2

④ 5

⑤ 2

해설

$$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$$

$$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$$

$$(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$$

$$37 + 12k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{37}{12}$$

따라서 최대정수는 -4이다.

8. 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4} = (k - a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$$

$$\therefore -2ka - b + 2 = 0$$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로 k 에 대한 항등식이다.

$$a = 0, b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

9. 이차식 $ax^2 + 4x + 2a$ 가 x 에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① ± 1

② $\pm \sqrt{2}$

③ ± 2

④ $\pm \sqrt{3}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x 에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a \cdot 2a = 0$$

$$4 - 2a^2 = 0, a^2 = 2$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{2}$$

10. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x - 3)(2x + 1)$

② $2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

③ $(x + 3)(2x - 1)$

④ $2 \left(x + 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

⑤ $2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x + 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

해설

$$a = 2, b' = -2, c = 3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

11. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

12. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 최댓값은?

① -4

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$$

$$x = 1 \text{ 또는 } 2 \quad y = \pm 2$$

$$\therefore (xy \text{의 최댓값}) = 4$$

13. $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{100} = (a+bi)z$ 를 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ 1

해설

$$z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i \text{ 이므로}$$

$$z^{100} = (z^2)^{50} = i^{50} = (i^4)^{12} \cdot i^2 = -1$$

$$\begin{aligned}\therefore -1 &= (a+bi) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) + \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)i\end{aligned}$$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) = -1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{2}$$

14. 다음 조건을 모두 만족하는 0 이 아닌 세 실수 a, b, c 에 대하여 식

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{-2c}} \text{ 을 간단히 하면?}$$

㉠ $a > b > c$

㉡ $ac < bc$

㉢ $|bc| = bc$

㉣ $a > 0$

① a

② $a - 2i$

③ $a + 2i$

④ $-a$

⑤ $-a - 2i$

해설

i) $a > b > c, \quad ac < bc \Rightarrow c < 0$

ii) $|bc| = bc \Rightarrow b, c \text{ 는 같은 부호} \Rightarrow b < 0$

$$\therefore \sqrt{a} \times \sqrt{a} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{-2c}}$$

$$= |a| + \sqrt{\frac{-b}{b}} - \sqrt{\frac{2c}{-2c}}$$

$$= a + i - i = a$$

15. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$

② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$

③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$

④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$

⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$$a > 0, b < 0 \text{ 일 때 } \sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\text{예를들면, } i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$$

16. 방정식 $(a^2 - 3)x - 1 = a(2x + 1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(a^2 - 2a - 3)x = a + 1$$

$$(a - 3)(a + 1)x = a + 1$$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

17. 방정식 $(k^2 - 6)x = k(x + 1) + 2$ 의 해가 존재하지 않을 때, k 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

x 에 대하여 정리하면

$$(k^2 - k - 6)x = k + 2$$

$$(k + 2)(k - 3)x = k + 2$$

$k = 3$ 일 때, $0 \cdot x = 5$ (불능)

18. $|x - 1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x - 1| = 3 - |x|$ 에서,
 $|x| + |x - 1| = 3$ 이다.

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - (x - 1) = 3$$

$$\therefore x = -1$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - (x - 1) = 3$$

$0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + (x - 1) = 3$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 구하는 해는

$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

19. 실수 a, b 에 대하여 연산 $*$ 를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x * (x - 6) = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, 2$$

$$\therefore \alpha = -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta)$$

$$\therefore \alpha + 2\beta = 1$$

20. 이차방정식 $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 6 = 0$ 의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2 + \sqrt{3}$ 을 곱하면

$$x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x - (12 + 6\sqrt{3}) = 0$$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x = (\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 12 + 6\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore x = 3\sqrt{3} + 3 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3} - 1$$

큰 근은 $3\sqrt{3} + 3$

그런데 $\sqrt{3} \approx 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

21. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (1+3i)x - 2(1+i) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

주어진 방정식의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(1+3i)x - 2(1+i)(1+i) = 0$$

$$2x^2 + (4i-2)x - 2(2i) = 0$$

$$x^2 + (2i-1)x - 2i = 0$$

$$(x+2i)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2i \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (-2i)^2 + 1^2 = -3$$

22. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0 \text{이므로}$$

$$x = -2, x = 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 3$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 - x + 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = 4$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -1$

(i), (ii) 에서 $x = 3, -1$ 이므로

두 근의 합은 2

23. 방정식 $\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x - \frac{1}{2}\right] - 7 = 0$ 의 해 $a \leq x < b$ 또는 $c \leq x < d$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right] - 1 \text{ 이므로}$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x + \frac{1}{2}\right] - 4 = 0$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = 4 \text{ 또는 } \left[x + \frac{1}{2}\right] = -1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 이다}$$

따라서 구하는 값은

$$\therefore a + b + c + d = 6$$

24. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $-1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 대입하여 정리하면

$$3 - 2\sqrt{2} + a(-1 + \sqrt{2}) + b = 0$$

$$-a + b + 3 + (a - 2)\sqrt{2} = 0$$

$$-a + b + 3 = 0 \text{ 과 } a - 2 = 0 \text{ 에서 } a = 2, b = -1$$

25. 이차방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로

다른 한 근은 $b - \sqrt{3}i$ 이다.

따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서

$$a = (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = b^2 + 3$$

$$-6 = (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = 2b,$$

$$b = -3, a = 12$$

따라서 $a + b = 9$

26. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2i - 3x - i) \\ &= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i\end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

27. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.

㉡ $\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.

㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.

㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + c) + (b + d)i}$
 $= (a + c) - (b + d)i$
 $= (a - bi) + (c - di)$
 $= \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

$\overline{\alpha\beta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$
 $= (ac - bd) - (ad + bc)i$
 $= (a - bi)(c - di)$
 $= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$

$\therefore$ 참

28. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ 0

④ $5a$

⑤ a

해설

$$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

29. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$

② $-y$

③ $2x$

④ $\frac{-x}{2}$

⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{그러므로 } \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i &= \frac{1}{2} (z - \bar{z}) i \\ &= \frac{1}{2} (x + yi - x + yi) i \\ &= \frac{1}{2} (2yi) i = -y\end{aligned}$$

30. 구간 $0 < x < 5$ 에서 $x = \frac{1}{x - [x]}$ 를 만족시키는 x 의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$ 이므로 x 는 정수가 아니다.

주어진 식의 양변에 $x - [x]$ 를 곱하면

$$x^2 - x[x] - 1 = 0$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$

$\therefore x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$ 에 속하지 않는다.

$\therefore$ 해가 없다.

(ii) $1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$1 < x < 2 \text{이므로 } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(iii) $2 < x < 3$ 일 때 $[x] = 2$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$2 < x < 3 \text{이므로 } x = 1 + \sqrt{2}$$

(iv) $3 < x < 4$ 일 때 $[x] = 3$

$$\therefore x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$3 < x < 4 \text{이므로 } x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

(v) $4 < x < 5$ 일 때 $[x] = 4$

$$\therefore x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$4 < x < 5 \text{이므로 } x = 2 + \sqrt{5}$$

(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x 의 개수는 4개

31. m 은 양의 정수이고, x 에 관한 이차방정식 $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + m\sqrt{2} - 4 = 0$ 의 한 근은 정수이다. 이 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α 라 하자

$$\alpha^2 - (3 + \sqrt{2})\alpha + m\sqrt{2} - 4 = 0$$

$$(m - \alpha)\sqrt{2} + \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$m = \alpha \text{ 그리고 } \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0$$

$$\alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

m 이 양의 정수이므로 $\alpha = 4$ 에서 $m = 4$

32. 이차방정식 $2x^2 + x - 5 = 0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x - \sqrt{41})^2 + (2x - 1)(x + 1)$ 의 값은?

① 4

② 2

③ -1

④ 5

⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

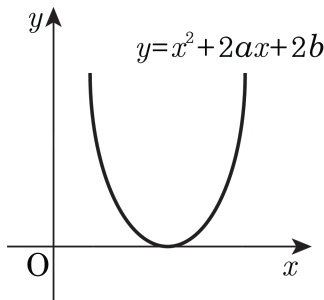
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

33. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
- ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
- ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

$$\text{판별식 } \frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$$

$$= 2b - b^2 - 2$$

$$= -(b^2 - 2b + 2)$$

$$= -(b-1)^2 - 1 < 0$$

∴ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

34. 방정식 $\{1 + (a + b)^2\} x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때 $a^3 + b^3 - 3ab$ 의 값을 구하면 ? (단, a, b 는 실수)

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - \{1 + (a + b)^2\} \cdot 2 \geq 0$$

$$-(a + b)^2 - 2(a + b) - 1 \geq 0$$

양변에 -1 을 곱하면

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\{(a + b) + 1\}^2 \leq 0$$

그런데 a, b 가 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

$$\begin{aligned}\therefore a^3 + b^3 - 3ab &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab \\ &= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab \\ &= -1\end{aligned}$$

35. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2 + 2cx + a-b$ 는 x 의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② $a = b$ 인 이등변삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ a 가 빗변인 직각삼각형

⑤ c 가 빗변인 직각삼각형

해설

a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

따라서, $a + b > 0$ 이므로 준식은 이차식이다.

준식이 완전제곱식이 되려면

$$\text{판별식 } D = 0$$

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0$$

$$\text{정리하면, } c^2 - a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, a 가 빗변인 직각삼각형

36. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{8}{49}$

② $\frac{49}{8}$

③ 49

④ 8

⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$

37. 이차방정식 $x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

$x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = 3k - 11$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= k^2 - 12k + 44 = (k - 6)^2 + 8$$

따라서 $k = 6$ 일 때 $(\alpha - \beta)^2$ 는 최소

해설

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \text{이므로}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{k^2 - 12k + 44}}{1}$$

$\therefore k^2 - 12k + 44$ 가 최소하려면 $k = 6$

38. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면

$x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.

$$\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$$

$$\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 α , 2α 가 된다.

$$\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12$, $c = 35$ 이므로

처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } -7, \quad x = 5 \text{ 또는 } 7$$

$$\text{따라서 (두 근의 제곱의 합)} = (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$$

39. 실계수의 이차방정식 $x^2 + bx + c = 0$ 이 허근 α, β 를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$$\alpha = p + qi \text{ 이면 } \beta = p - qi \ (q \neq 0)$$

$$\alpha^2 + 2\beta = 1 \text{ 이므로}$$

$$(p + qi)^2 + 2(p - qi) = 1 \text{ 에서}$$

$$(p^2 - q^2 + 2p - 1) + 2q(p - 1)i = 0$$

$$\therefore p^2 - q^2 + 2p - 1 = 0, \ 2q(p - 1) = 0$$

$$q \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$p = 1, \ q^2 = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2p = 2, \ \alpha\beta = p^2 + q^2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\therefore b = -2, \ c = 3$$

$$\therefore b + c = 1$$

40. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 에서 한 근만이 양이기 위한 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a \leq 0$

② $0 < a \leq 1$

③ $1 < a \leq 2$

④ $-2 < a \leq 2$

⑤ $-1 < a \leq 2$

해설

(i) $\alpha > 0, \beta < 0$ 일 때, $\alpha\beta = a^2 - 4 < 0$

$$\therefore -2 < a < 2$$

(ii) $\alpha > 0, \beta = 0$ 일 때,

$$\alpha + \beta = a > 0, \alpha\beta = a^2 - 4 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 $-2 < a \leq 2$

41. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

$$i(1+i)^n = p(p > 0), (1+i)^n = \frac{p}{i} = -pi$$

즉, $(1+i)^n = \text{음수} \times i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$$n = 2k \text{ 일 때, } (1+i)^{2k} = (2i)^k$$

$k = 4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$$k = 4m + 1 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+1} \Rightarrow \text{양수} \times 2i$$

$$k = 4m + 2 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+2} \Rightarrow \text{양수} \times (-4)$$

$$k = 4m + 3 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+3} \Rightarrow \text{양수} \times (-8i)$$

따라서 $k = 4m + 3$, 즉 $n = 2k = 8m + 6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.

42. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i - 2$

② $2i + 2$

③ $2i - 4$

④ $2i + 4$

⑤ $4i - 2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\ &= (i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}) \\ &\quad + (-1+2-3+\cdots+10) \\ &= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\ &= i+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i+4) + (-i-11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1+12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i-13) = i-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\ &= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4 \end{aligned}$$

43. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 α 의 켤레복소수, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $a = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

㉢ $\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉤ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.

㉥ $\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉤, ㉥

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)

㉠ $\alpha = \bar{\beta} \Rightarrow \beta = \bar{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ (참)

㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$ (거짓)

㉤ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

㉥ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0, b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

44. $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.

(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 x, y 에 대하여 $\overline{\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$ 이므로

직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.

따라서 복소수의 켈레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해 보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1$, $\alpha\bar{\alpha} = \frac{3}{2}$ 이고

$z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)}{(\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1)} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + (\alpha + \bar{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore 7z\bar{z} = 7 \times \frac{3}{7} = 3$$

45. 복소수 α 의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $a > 0$)라 두면

$$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$$

$$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$$

$$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots \textcircled{1}, 3a^2b - b^3 = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b = \frac{1}{2}, a = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3} + i}{2} + \frac{2}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{\sqrt{3} + i}{2} + \frac{\sqrt{3} - i}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

해설

$$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \frac{1}{i} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3 \right\} = 0$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$$

($\because$ 복소수 α 의 실수부가 양이므로)

$$\therefore \alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$$

46. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10} + (\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 양변에 2를 곱하고 } -1 \text{ 을}$$

이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \alpha + 1 = -\alpha^2, \beta + 1 = -\beta^2$$

①의 양변에 각각 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 곱하면

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, (\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 1) = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

$$(\alpha + 1)^{10} + (\beta + 1)^{10}$$

$$= (-\alpha^2)^{10} + (-\beta^2)^{10}$$

$$= (\alpha^3)^6 \cdot \alpha^2 + (\beta^3)^6 \cdot \beta^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= -1 \quad (\because \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1)$$

해설

$$\alpha + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha + 1 = A, \beta + 1 = B \text{ 라 하면}$$

$$A + B = 1, AB = 1 \text{ 이므로 } A, B \text{ 는}$$

이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 이다.

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = -1, A^3 = B^3 = -1$$

$$(\text{준식}) = A^{10} + B^{10} = (A^3)^3 \cdot A + (B^3)^3 \cdot B$$

$$= -(A + B)$$

$$= -1$$

47. 실수 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 가 $16 + x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = 0$ 을 만족할 때,
 $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \dots \times \sqrt{x_9}$ 의 값들의 곱을 구하면?

① 8

② 16

③ 24

④ 36

⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = -16$ 이므로

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.

이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ ($y_i > 0$) 이라 하고 양수인 것들은

$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ ($z_i > 0$) 이라 하자.

그러면 $y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n = 16$ ($m + n = 9, m : \text{홀수}$)

i) $m = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2$) 일 때,

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i \end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3$ ($k = 0, 1$) 일 때,

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i \end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$

48. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 를 m 에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

- ① 최댓값: 8, 최솟값: 2 ② 최댓값: 10, 최솟값: 3
 ③ 최댓값: 12, 최솟값: $\frac{15}{8}$ ④ 최댓값: 11, 최솟값: $\frac{21}{8}$
 ⑤ 최댓값: 13, 최솟값: $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로

$$D/4 = m^2 - (2m^2 + m - 2) \geq 0 \text{에서 } -2 \leq m \leq 1$$

$$\alpha + \beta = -2m, \alpha\beta = 2m^2 + m - 2 \text{이므로}$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$$

$$= (-2m)^2 - (2m^2 + m - 2)$$

$$= 2m^2 - m + 2$$

$$= 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{8} \quad (-2 \leq m \leq 1)$$

$$\therefore m = \frac{1}{4} \text{일 때, 최솟값 } \frac{15}{8}$$

$$m = -2 \text{일 때, 최댓값 } 12$$

49. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근 α, β 를 갖는다.
 $f(x) = x^2 + bx + a$ 에 대하여 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + a = \beta \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(\beta) = \beta^2 + b\beta + a = \alpha \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 - \beta^2 + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + b + 1) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \text{이므로 } \alpha + \beta + b + 1 = 0$$

$$\therefore -a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 + \beta^2 + b(\alpha + \beta) + 2a = \alpha + \beta$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (b - 1)(\alpha + \beta) + 2a = 0$$

$$\therefore a^2 - 2b - a(b - 1) + 2a = 0 \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}$ 에서 $b = a - 1$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면

$$a^2 - 2(a - 1) - a(a - 1 - 1) + 2a = 0, 2a + 2 = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

$$\therefore a + b = -3$$

50. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{㉠})x + (\textcircled{㉡}) = 0$ 이다. ㉠과 ㉡에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 1 - 2 = -1$$

㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면

$$\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$$

따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{㉠} = 1, \textcircled{㉡} = 1$$