1. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

보기

㉠ $a > b,\ c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

㉡ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

㉢ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a - b > 0,\ c - d > 0$ 에서 양변을 더해 정리하면 주어진 식이 나온다.

㉡ $a > 0 > b$ 인 경우 b의 절댓값이 a 보다 크면 주어진 식은 성립하지 않는다.

㉢ 주어진 식에서 a, b의 부호가 모두 양수이므로 그 역수는 반대가 된다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

① 9 개 ② 8 개 ③ 7 개 ④ 6 개 ⑤ 5 개

해설

$\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x \le 9 \\ 3x > -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > -5 \end{cases}$

$\therefore \ -5 < x \le 3$

위의 범위를 만족하는 정수는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이다.

3. 부등식 $3x-2 \le 5x+8 \le 4x+a$ 의 해가 $b \le x \le 9$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 19 ⑤ 22

해설

$3x-2 \le 5x+8 \le 4x+a$

$\rightarrow \begin{cases} 3x-2 \le 5x+8 \\ 5x+8 \le 4x+a \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 3x-5x \le 8+2 \\ 5x-4x \le a-8 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x \ge -5 \\ x \le a-8 \end{cases}$

$-5 \le x \le a-8$ 에서 $a-8=9$ 이므로 $a=17$

또한 $b=-5$

$\therefore\ a=17,\ b=-5$

따라서 $a+b=17-5=12$ 이다.

4. $2x-1>0$, $x^2-3x-4<0$를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

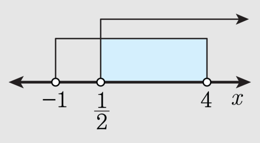
해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉠

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4 \cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡의 공통 부분은

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

5. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서
$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$
$\therefore x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1$
$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 x값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $2\sqrt{2}$　② $-\sqrt{3}$　③ $\sqrt{5}$
④ $-2\sqrt{2}$　⑤ $-\sqrt{5}$

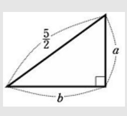
해설

$x^2+xy-2y^2=(x-2y)(x+y)=0$
㉠ $x=2y$일 때
$(2y)^2+y^2=5y^2=10$
$y^2=2$, $y=\pm\sqrt{2}$
$x=2\sqrt{2}, y=\sqrt{2}$
$x=-2\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$
㉡ $x=-y$일 때
$(-y)^2+y^2=2y^2=10$, $y^2=5$, $y=\pm\sqrt{5}$
$x=-\sqrt{5}, y=\sqrt{5}$
$x=\sqrt{5}, y=-\sqrt{5}$

7. 빗변의 길이가 $\frac{5}{2}$ 인 직각 삼각형의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은?

① $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{31}}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하면넓이는

$\frac{1}{2}ab = \frac{3}{2} \quad \cdots$①

$a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \quad \cdots$②

①, ②식에서

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4}$

$\therefore\ a + b = \frac{7}{2}$

8. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 에서

$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$

$(x+y)^2+(x-2)^2=0$

$x,\ y$ 가 실수이므로 $x+y=0,\ x-2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-4$

9. 다음 연립부등식 중 해가 없는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $\begin{cases} 3x-2 \le -2(x-4) \\ -(x-5) \le x+1 \end{cases}$

㉡ $\begin{cases} x-3 \ge 2x+1 \\ 6x-1 > 2x+11 \end{cases}$

㉢ $\begin{cases} -x-5 < 3x+7 \\ \frac{1}{2}x+3 > \frac{2x-2}{3} \end{cases}$

㉣ $\begin{cases} 2(x+1) < x-6 \\ 2x-4 < 5(x-2) \end{cases}$

㉤ $2x-3 \le 3x+1 < x+9$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

㉡ $\begin{cases} x-3 \ge 2x+1 & \therefore x \le -4 \\ 6x-1 > 2x+11 & \therefore x > 3 \end{cases}$

$\therefore\ x \le -4,\ x > 3$ (해가 없다.)

㉣ $\begin{cases} 2(x+1) < x-6\text{에서 } 2x+2 < x-6 \\ \therefore\ x < -8 \\ 2x-4 < 5(x-2)\text{에서 } 2x-4 < 5x-10 \\ \therefore\ 2 < x \end{cases}$

$\therefore\ x < -8,\ x > 2$ (해가 없다.)

㉠ $\begin{cases} 3x-2 \le -2(x-4)\text{에서 } 5x \le 10\ \therefore\ x \le 2 \\ -(x-5) \le x+1\text{에서 } 4 \le 2x\ \therefore\ 2 \le x \end{cases}$

$\therefore\ x = 2$

㉢ $\begin{cases} -x-5 < 3x+7 \qquad \therefore\ x > -3 \\ \frac{1}{2}x+3 > \frac{2x-2}{3}\text{에서 } 3x+18 > 2(2x-2) \\ \therefore\ x < 22 \end{cases}$

$\therefore\ -3 < x < 22$

㉤ $\begin{cases} 2x-3 \le 3x+1 & \therefore x \ge -4 \\ 3x+1 < x+9 & \therefore\ x < 4 \end{cases}$

$\therefore\ -4 \le x < 4$

10. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면
$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)
i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq x \leq 3$
ii) $a>b$이면
$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \geq 0$
$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

11. $ax^2 + 4x - 1 \geq -2x^2 - a$가 x의 임의의 실수값에 대하여 항상 성립할 때, 실수 a의 범위는?

① $a \geq 2$　　② $a \leq -3$　　③ $a \leq 2$

④ $a \geq -3$　　⑤ $a \leq -1$

해설

$(a+2)x^2 + 4x + (a-1) \geq 0$이
임의의 실수 x에 대하여 성립하려면

(ⅰ) $a + 2 > 0 \quad \therefore\ a > -2$

(ⅱ) $\dfrac{D}{4} = 4 - (a+2)(a-1) \leq 0$에서

$a^2 + a - 6 \geq 0,\ (a+3)(a-2) \geq 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a \leq -3,\ a \geq 2$

$\therefore\ a \geq 2$

12. x 에 대한 이차부등식 $ax^2+5x+b<0$ 의 해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값은?

① -7 ② -3 ③ 3 ④ 7 ⑤ 10

해설

해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이므로 $a<0$
해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은
$(x-2)(x-3)>0,\ x^2-5x+6>0$
양변에 -1을 곱하면
$-x^2+5x-6<0$
$\therefore a=-1,\ b=-6$
$a+b=-7$

13. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15　　② 17　　③ 19　　④ 20　　⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) < 0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) < 0이므로
$-a+1<0 \quad \therefore a>1 \cdots$①
(두 근의 합) ≥ 0이므로
$-(a^2-5a-6) \geq 0$
$a^2-5a-6 \leq 0$
$(a-6)(a+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 6 \cdots$②
①, ②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

14. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠ 이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡ 식이
항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

15. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$　　② $a > -1$　　③ $a \ge -1$
④ $a < -1$　　⑤ $a \le -1$

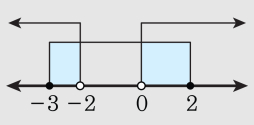
해설
$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

16. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 + x - 6 \le 0 \\ x^2 + ax + b > 0 \end{cases}$ 의 해가 $-3 \le x < -2$ 또는 $0 < x \le 2$일 때, a, b 를 구하여 $a \times b$ 를 계산하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \le 0$에서
$-3 \le x < 2$이므로
연립부등식의 해가 다음 그림과 같으려면 $x^2 - ax + b > 0$의 해는
$x < -2, x > 0$이어야 한다.



$x^2 + ax + b = x(x+2) = x^2 + 2x > 0$
$\therefore a = 2,\ b = 0$
$\therefore a \cdot b = 0$

17. 이차방정식 $ax^2 - (a+1)x - 4 = 0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1과 2 사이에 있을 때, 상수 a의 범위는?

① $a > 3$　② $0 < a < 3$　③ $a \geq \frac{1}{2}$
④ $a \geq 1$　⑤ $-1 < a < 3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$ 이어야 한다.
따라서 $f(-1) = a + (a+1) - 4 > 0$ 에서
$2a > 3 \quad \therefore\ a > \frac{3}{2} \cdots$ ㉠
$f(2) = 4a - 2a - 2 - 4 > 0$ 에서
$2a > 6 \quad \therefore\ a > 3 \cdots$ ㉡
㉠,㉡을 모두 만족해야 하므로
구하는 a의 값의 범위는 $a > 3$

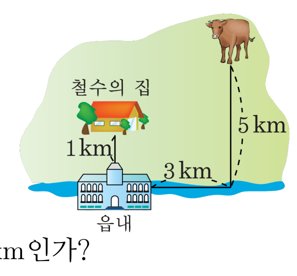
18. 두 점 $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(4,5)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(0, \frac{9}{2}\right)$
④ $\left(0, \frac{13}{2}\right)$ ⑤ $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

해설

y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\sqrt{\{0-(-2)\}^2 + (a-1)^2}$
$= \sqrt{(0-4)^2 + (a-5)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2 - 2a + 5 = a^2 - 10a + 41$
$8a = 36$
$\therefore a = \frac{9}{2}$
따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$이다.

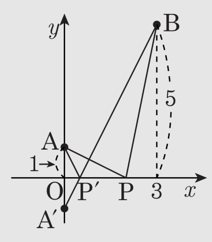
19. 철수의 집은 읍내로부터 정북으로 1 km 떨어져 있다. 그리고 작은 시냇물이 정동에서 정서로 읍내를 관통해서 흐르고 있다. 지금 철수는 읍에서 정동으로 3 km, 정북으로 5 km 떨어진 곳에서 소에게 풀을 먹이고 있다. 이때 철수가 시냇가로 가서 소에게 물을 먹이고 집으로 가는 최단 거리는 몇 km인가?



① 3 km　② $4\sqrt{3}$ km　③ $3\sqrt{5}$ km　④ $4\frac{5}{6}$ km　⑤ 2.5 km

해설

위의 문제 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



집의 위치는 A(0, 1), 철수의 현위치는 B(3, 5)

따라서 시냇가의 어느 한 지점 P까지 와서 집까지 가는 거리는 $\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{AP}}$이다.

이 거리가 가장 짧으려면 A의 대칭점 A′(0, −1)과 B를 잇는 $\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{BP'}}+\overline{\mathrm{A'P'}}$이 가장 짧은 거리이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

20. 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분한 점을 C, 외분한 점을 D라 할 때, $\frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\boxed{}}{\overline{\mathrm{AB}}}$가 성립한다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

네 점의 좌표를 각각 A(0), B(b), C(c), D(d)라 하면

$c=\frac{mb}{m+n}$, $d=\frac{mb}{m-n}$

($\because$ A의 좌표가 0)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=c-0=\frac{mb}{m+n}$

$\overline{\mathrm{AD}}=d-0=\frac{mb}{m-n}$

$\overline{\mathrm{AB}}=b-0=b$

$\therefore\ \frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{m+n}{mb}+\frac{m-n}{mb}$

$=\frac{2m}{mb}=\frac{2}{b}=\frac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$

21. 세 점 A(0, 0), B(3, 4), C(−1, 0) 에 대하여 사각형 ABCD 가 평행사변형일 때, 점 D 의 좌표는?

① (−2, 3)　　② (−4, −4)　　③ (2, −1)

④ (1, 3)　　⑤ (−2, −3)

해설

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

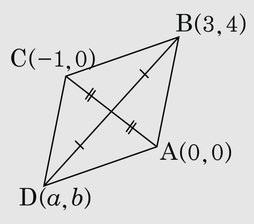
$\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 중점이 일치한다.

즉, D 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면

$\dfrac{0+(-1)}{2}=\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{0+0}{2}=\dfrac{b+4}{2}$

$\therefore\ a=-4,\ b=-4$

$\therefore$ D $(-4,\ -4)$



22. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P 의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$ 라 두면
$x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$
$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$
$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$
$\therefore P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소
※ 점 P 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.
$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

23. $2x+(a+3)y-1=0$, $(a-2)x+ay+2=0$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 직선 $2x+(a+3)y-1=0$,
$(a-2)x+ay+2=0$이 평행해야 하므로
$\dfrac{2}{a-2}=\dfrac{a+3}{a}\neq\dfrac{-1}{2}$
$(a-2)(a+3)=2a$, $(a+2)(a-3)=0$
$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=3$
그런데 $\dfrac{a+3}{a}\neq\dfrac{-1}{2}$에서 $a\neq-2$이므로
구하는 a의 값은 3이다.

24. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1 - y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x + 2 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0,\ 1 - y = 0$

$\therefore x = -2,\ y = 1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a = -2,\ b = +1$

$\therefore\ a + b = -1$

25. 두 직선 $ax+by+1=0,\ bx+ay+1=0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내면?

① $\frac{\sqrt{1}}{|a|}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{|a|}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{|a|}$ ④ $\frac{2}{|a|}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\neq\frac{1}{1}$

$\therefore\ a=-b\ (\because\ a\neq b)$

직선 $ax+by+1=ax-ay+1=0$ 위의 한 점을 잡으면 $\mathrm{P}\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$ 이므로 직선 $bx+ay+1=0$ 에서 $-ax+ay+1=0$ 까지의 거리는 $\frac{\left|(-a)\cdot 0+a\cdot\frac{1}{a}+1\right|}{\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{|a|}$

26. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다. a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{13}{2}$　⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$의 방정식은 $5x-12y=0$

△ABC의 높이 h는

$h=\frac{|5a-12b|}{\sqrt{5^2+12^2}}$

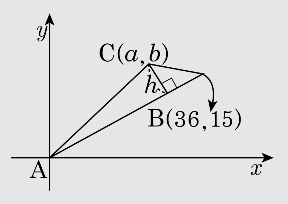
△ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h$

$=\frac{1}{2}3\sqrt{12^2+5^2}\cdot\frac{|5a-12b|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{3}{2}|5a-12b|$

a,b는 정수이므로, $|5a-12b|=1$일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a,b)=(5,2)$ 또는 $(7,3)$일 때이다.



27. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0,\ t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ⅱ) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x,\ x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

28. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로
$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$
주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$
$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$
$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$
$\therefore\ k = 4$

29. 12% 의 설탕물 300g 이 있을 때, 물 xg 을 증발시켜 15% 이상 20% 이하의 설탕물을 만들려고 한다. x 의 값으로 옳지 않은 것은?

① 60　② 80　③ 100　④ 120　⑤ 130

해설

12% 의 소금물 300g 의 소금의 양은 $\frac{12}{100}\times 300 = 36$ (g) 이다.

따라서 물 xg 을 뺐을 때의 농도를 나타내면 $\frac{36}{300-x}\times 100$ 이다.

이 값이 15% 이상 20% 이하이므로, $15 \le \frac{36}{300-x}\times 100 \le 20$ 이고,

이를 연립 방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 15 \le \frac{36}{300-x}\times 100 \\ \frac{36}{300-x}\times 100 \le 20 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \ge 60 \\ x \le 120 \end{cases}$ 이다.

따라서 빼줘야 하는 물의 양 x 의 범위는 $60 \le x \le 120$ 이다.

30. 테니스 공을 한 사람당 7개씩 나누어 주었을 때 30개가 남았고, 9개씩 나누어 주었을 때에는 마지막 받은 사람이 5개 이상 7개 미만으로 테니스 공을 받았다고 한다. 테니스 공의 개수는 몇 개인가?

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 149 개

해설

사람의 수를 x 명이라고 하였을 때, 테니스 공의 개수는 $(7x+30)$ 개다.
“9개씩 나누어 주었을 때에는 마지막 받은 사람이 5개 이상 8개 미만” 이라는 것은 $(x-1)$ 명까지는 9개를 받았고 나머지 한명이 다르게 받은 것이므로, 마지막 사람이 5개를 받은 경우는 $9(x-1)+5$(개) 이고, 7개를 받는 경우는 $9(x-1)+7$(개) 이다.
따라서 테니스 공의 개수는 마지막 사람이 5개 이상 받은 경우와 7개 미만 받은 경우 사이에 있으므로, 이를 식으로 나타내면 $9(x-1)+5 \le 7x+30 < 9(x-1)+7$ 이다. 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 9(x-1)+5 \le 7x+30 \\ 7x+30 < 9(x-1)+7 \end{cases}$ 이다. 간단히 하면, $\begin{cases} x \le 17 \\ x > 16 \end{cases}$ 이다. 따라서 x 의 범위는 $16 < x \le 17$ 이다.
따라서 테니스의 공의 개수는 $7 \times 17 + 30 = 149$ (개) 이다.

31. 좌표평면 위의 원점에서 직선$3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

32. $\begin{cases} xy+3y-2z=0 \\ x+2y-z=-1 \end{cases}$ 이 연립방정식의 해 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값들을 작은 값부터 나열하여라. (단, x, y, z는 음이 아닌 정수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

▷ 정답 : 20

▷ 정답 : 23

해설

$\begin{cases} xy+3y-2z=0 \cdots ① \\ x+2y-z=-1 \cdots ② \end{cases}$

① − 2 × ② 하면

$xy+3y-2x-4y=2$, $xy-2x-y-2=0$

$x(y-2)-(y-2)=4$, $(x-1)(y-2)=4$

x, y는 음이 아닌 정수이므로

$(x-1,\ y-2)=(1,4),(2,2),(4,1)$

$\therefore\ (x,y,z)=(2,6,15),(3,4,12),(5,3,12)$

$\therefore\ x+y+z=19,\ 20,\ 23$

33. 연립방정식 $2x+ay=6$, $-3ax+2y=-2$ 에서 $x<0$, $y>0$ 이기 위한 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} 2x+ay=6 & \cdots ㉠ \\ -3ax+2y=-2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

y 를 소거하기 위하여 ㉠ $\times 2-$ ㉡ $\times a$ 을 하면

$(4+3a^2)x=12+2a$ 에서

$x=\dfrac{12+2a}{4+3a^2} \cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면,

$2\left(\dfrac{12+2a}{4+3a^2}\right)+ay=6$, $y=\dfrac{18a-4}{4+3a^2}$

$x<0$, $y>0$ 이므로

$\dfrac{12+2a}{4+3a^2}<0$, $\dfrac{18a-4}{4+3a^2}>0$

에서 $4+3a^2$ 는 모든 자연수 a 에 대하여 0 보다 크므로

$2a+12<0$, $a<-6$

$18a-4>0$, $a>\dfrac{2}{9}$

따라서 $a>\dfrac{2}{9}$ 를 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 1 이다.

34. 지연이는 100 원짜리와 500 원짜리 동전으로만 5000 원을 가지고 있다. 100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적을 때, 500 원짜리 동전의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

100 원짜리 동전의 개수를 x 개, 500 원짜리 동전의 개수를 y 개라고 하면,
$100x + 500y = 5000$, $x + 5y = 50$, $x = 5(10 - y)$
100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적다고 하였으므로,
$2y < x < 3y$, $2y < 5(10 - y) < 3y$, $\frac{25}{4} < y < \frac{50}{7}$ 이고, 이를 만족하는 자연수 $y = 7$ 이다.
500 원짜리 동전의 개수는 7 개이다.

35. 좌표평면 위의 세 점 $A(3,\ 4)$, $B(0,\ 0)$, $C(8,\ -8)$에 대하여 $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$ ② $\left(\frac{20}{9},\ -\frac{20}{9}\right)$ ③ $\left(\frac{15}{11},\ -\frac{15}{11}\right)$
④ $\left(\frac{25}{13},\ -\frac{25}{13}\right)$ ⑤ $\left(\frac{28}{17},\ -\frac{28}{17}\right)$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2+(-8-4)^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$
$\angle BAC$ 의 이등 분선이 선분 BC 와 만나는 교점을 $D(x, y)$ 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$
따라서, 점 $D(x, y)$는 선분 BC 를 $5\ :\ 13$ 으로 내분하는 점이므로
$x = \frac{5\cdot 8+13\cdot 0}{5+13} = \frac{20}{9}$,
$y = \frac{5\cdot(-8)+13\cdot 0}{5+13} = -\frac{40}{18} = -\frac{20}{9}$
$\therefore\ D\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$