

1. 임의의 실수 x, y 에 대하여, $(x+y)a^2 + (x-y)b = 4x + y$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$

② $\frac{15}{4}$

③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{19}{4}$

⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$$(a^2 + b)x + (a^2 - b)y = 4x + y$$

$$a^2 + b = 4 \cdots \textcircled{1}, \quad a^2 - b = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{19}{4}$$

2. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

① $100^6 - 1$

② $100^6 + 1$

③ $100^9 - 1$

④ $100^9 + 1$

⑤ 1

해설

100 = a 로 치환 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a - 1)(a + 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) \\&= (a^3 - 1)(a^3 + 1) \\&= a^6 - 1 \\&= 100^6 - 1\end{aligned}$$

3. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$

② $\pm 5\sqrt{5}$

③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm \sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm \sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

4. $a^3 + b^3 + c^3 = p(a+b+c)^3 + q(a+b+c)(ab+bc+ca) + rabc$ 가 a, b, c 에 대한 항등식이 되도록 상수 p, q, r 의 값을 정할 때, $p+q+r$ 을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ -23

⑤ 23

해설

$a^3 + b^3 + c^3 = p(a+b+c)^3 + q(a+b+c)(ab+bc+ca) + rabc$ 에서
 a, b, c 에 대한 항등식이므로

$$a=1, b=0, c=0 : 1 = p \cdots \textcircled{1}$$

$$a=1, b=1, c=0 : 2 = 2p + 2q \cdots \textcircled{2}$$

$$a=1, b=1, c=1 : 3 = 27p + 9q + r \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } p=1, q=0, r=-24$$

$$\therefore p+q+r = -23$$

5. 다항식 $x^3 + ax - 8$ 을 $x^2 + 4x + b$ 로 나눈 나머지가 $3x + 4$ 이다. 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -10, b = 3$

② $a = 10, b = 3$

③ $a = -10, b = -3$

④ $a = 7, b = 3$

⑤ $a = -5, b = 4$

해설

몫을 $x + c$ 라고 둔다면

$$x^3 + ax - 8 = (x^2 + 4x + b)(x + c) + 3x + 4$$

이차항의 계수 : $c + 4 = 0$ 에서 $c = -4$

상수항 : $bc + 4 = -8$ 에서 $b = 3$

일차항의 계수 : $4c + b + 3 = a$ 에서 $a = -10$

6. x 에 관한 항등식 $(x^2 + x + 1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$