

1. 등식 $x^2 + 2x + 3 = a(x - 1)^2 + bx + c$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

우변을 전개하여 동류항으로 묶는다.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 3 &= a(x - 1)^2 + bx + c \\&= ax^2 + (b - 2a)x + a + c\end{aligned}$$

$$a = 1, b - 2a = 2, a + c = 3$$

$$a = 1, b = 4, c = 2$$

$$a + b + c = 7$$

2. x 에 대한 다항식 $3x^3y + 5y - xz + 9xy - 4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3 + (9y - z)x + 5y - 4$ 이다.
- ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y - 4 + (9y - z)x + 3yx^3$ 이다.
- ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3차식이다.
- ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
- ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.

㉤ 상수항은 $5y - 4$ 이다.

3. $(x+y)a - (x-y)b - (y-z)c - 4z = 0$ 이 x, y, z 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc 를 구하면?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

x, y, z 에 대해 정리하면

$$(a-b)x + (a+b-c)y + (c-4)z = 0$$

x, y, z 에 대한 항등식이므로

$$a = b, a + b - c = 0, c = 4$$

$$\therefore a = b = 2, c = 4$$

$$\therefore abc = 16$$

4. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$, $2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A = x^3 + x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

② $A = x^3 - x^2 + x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$

③ $A = x^3 - x^2 + x - 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 7$

④ $A = x^3 - x^2 - x + 2$, $B = -2x^3 - x^2 + 5x + 3$

⑤ $A = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 6$, $B = -4x^3 + x^2 + x - 1$

해설

$$A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}) \div 3 : A = x^3 - x^2 + x + 2$$

$$(2\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}) \div 3 : B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$$

5. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x + y + z = 1 \text{ 에서}$$

$$x + y = 1 - z$$

$$y + z = 1 - x$$

$$z + x = 1 - y$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

6. $\frac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a 의 값을 구하면?
(단, $x \neq -\frac{1}{2}$)

① 1

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+2} = k \text{ (일정)라 놓으면}$$

$$2x+3a = k(4x+2) \text{ 에서 } (2-4k)x + (3a-2k) = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2-4k = 0, 3a-2k = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{3}$$

7. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

② $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$

④ $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

8. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a) \text{에서}$$

$$\{a+(b-c)\} \{a-(b-c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$$

$$a^2 - (b-c)^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$2a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

9. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 (x > 0)$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36

② 44

③ 52

④ 68

⑤ 82

해설

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{ 이므로}$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad (\because x > 0)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 52$$

10. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1

② 4

③ 9

④ 16

⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ & \frac{1}{2} (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0 \\ & \therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ & (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

11. A 를 B 로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 라 하고, Q 를 B' 으로 나눈 몫은 Q' , 나머지는 R' 이라 한다. A 를 BB' 으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R + R'B$

② $R' + RB$

③ RR'

④ R

⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$$A = BQ + R \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$Q = B'Q' + R' \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} A &= B(B'Q' + R') + R \\ &= (BB')Q' + (R + R'B) \end{aligned}$$

$R + R'B$ 가 A 를 BB' 로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$ 이어야 한다.

그런데 $R \leq B - 1$, $R' \leq B' - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} R + R'B &\leq (B - 1) + (B' - 1)B \\ &= BB' - 1 < BB' \end{aligned}$$

따라서 A 를 BB' 으로 나눈 나머지는 $R + R'B$ 이다.

12. $a + b = 1$, $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2000} + b^{2006}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$a + b = 1$ 에서 $b = 1 - a$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 이므로
 $a^2 + (1 - a)^2 = -1$, $2a^2 - 2a + 2 = 0$, $a^2 - a + 1 = 0$
이 식의 양변에 $a + 1$ 을 곱하면
 $(a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$, $a^3 + 1 = 0$
같은 방법으로 하면
 $b^3 + 1 = 0$ 이므로 $a^3 = -1$, $b^3 = -1$
 $\therefore a^{2000} + b^{2006} = (a^3)^{666} \cdot a^2 + (b^3)^{668} \cdot b^2$
 $= a^2 + b^2 = -1$

13. 다항식 $x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$ 을 삼차식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① $x^2 - 3$

② $x^2 + x - 2$

③ $-x^2 - 1$

④ $-x^2 + x$

⑤ $x - 1$

해설

$$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c = (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$a - b + c = -2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(x^2)^{1002} \times x + (x^2)^2 \times x + x^2 \times x + 1$$

$$= (x+1)(x^2+1)Qx + ax^2 + bx + c$$

에서 양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면

$$x + x - x + 1 = -a + bx + c$$

$$x + 1 = bx + c - a$$

$$\therefore b = 1, c - a = 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 $a = -1, b = 1, c = 0$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

해설

$$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$$

$$= (x^3 + x^2 + x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

양변에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 좌변이 $x + 1$

즉, 좌변의 식을 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 1$

따라서 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1$

$$x^{2005} + x^5 + x^3 + 1$$

$$= (x+1)(x^2+1)Q(x) + a(x^2+1) + x + 1$$

$$= (x^2+1)\{(x+1)Q(x) + a\} + x + 1$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $-2 = 2a$

$$\therefore a = -1$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x^2 + x$

14. n 이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$\begin{aligned}(\text{i}) \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)\end{aligned}$$

$$f(-2) = 4^n(4 - 2a + b) = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\begin{aligned}(\text{ii}) \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4) \\ &= x^{2n}(x + 2)(x + a - 2) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore x^{2n}(x + a - 2) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n, -4 + a = 1$$

$$\therefore a = 5$$

$$b = 2a - 4 \text{ 에서 } b = 6$$

$$\therefore a + b = 11$$

15. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i = 0, 1, 2, \cdots, 20$)

① 2^{10}

② $2^{10} - 1$

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이므로
 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = 1$$