1. 등식 $x+y+(x-2y)i=1+7i$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3 ② -3 ③ 6 ④ -6 ⑤ 8

해설

복소수의 상등에 의하여
$x+y=1,\ x-2y=7$
$x=3,\ y=-2$
$\therefore\ xy=-6$

2. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x^2 = (1 + \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}i$
$y^2 = (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -1 - 2\sqrt{2}i$
$\therefore\ x^2 + y^2 = -2$

해설

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = -2$

3. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i$
$= -4x + (x^2-4)i$

실수가 되려면 허수부분이 0 이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

4. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq$ 0이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore$ $x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

5. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$　② $-1-2i$　③ $-1+2i$
④ $-1-i$　⑤ $-1+i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1+3i \end{aligned}$$

6. 실수 x 에 대하여, $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$　　② $-2x+1$　　③ 3

④ -3　　⑤ $x+1$

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\ \ b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

7. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

8. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(준식)$= x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0\cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0\cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

9. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32}-\sqrt{-8}\sqrt{-3}+\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}=a+bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-32}-\sqrt{-8}\sqrt{-3}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$$
$$=4\sqrt{2}i+\sqrt{24}-\sqrt{8}i$$
$$=4\sqrt{2}i+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}i$$
$$=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}i$$
$$a=2\sqrt{6}, b=2\sqrt{2}$$
$$\therefore \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{3}$$

10. 정수 n에 대하여, $z=i^n+\dfrac{1}{i^n}$을 만족하는 실수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$z=i^n+\dfrac{1}{i^n}$ 에서

$n=1$ 일 때, $i+\dfrac{1}{i}=i-i=0$

$n=2$ 일 때, $-1+\dfrac{1}{-1}=-1-1=-2$

$n=3$ 일 때, $-i+\dfrac{1}{-i}=0$

$n=4$ 일 때, $1+\dfrac{1}{1}=2$

따라서, $z=-2,\ 0,\ 2$이므로 3개이다.

11. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 \right\}^n$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^n + \left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n + \left(-\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n + i^n$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

12. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수) 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ $f(z) \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 라 하면
$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$
ㄴ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$
ㄷ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \bar{w}$
$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

13. $\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ±1　② $\pm2i$　③ ±2　④ $\pm i$　⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a+bi \\ z = a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$$

$$\frac{\overline{z}^2+\overline{z}+z^2-z}{z\overline{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm1, b=-1$$

$$z=\pm1-i\ ,\ z^2=\pm2i$$

14. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$　② -1　③ 0　④ i　⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

15. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$에서 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{i}$ $\quad \therefore\ \overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i$

$\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \beta\overline{\beta} = 1$에서 $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha},\ \overline{\beta} = \frac{1}{\beta}$

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$ $\quad \therefore\ \alpha\beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$