1. 등식 $x+y+(x-2y)i=1+7i$을 만족하는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3 ② -3 ③ 6 ④ -6 ⑤ 8

해설

복소수의 상등에 의하여

$x+y=1,\ x-2y=7$

$x=3,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-6$

2. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x^2 = (1 + \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}i$
$y^2 = (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -1 - 2\sqrt{2}i$
$\therefore\ x^2 + y^2 = -2$

해설

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = -2$

3. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2-4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm2$

4. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

5. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$ ② $-1 - 2i$ ③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$ ⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1+3i \end{aligned}$$

6. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

7. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡
② ㉢,㉣
③ ㉠,㉣,㉤
④ ㉣,㉥
⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

8. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(준식)$= x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0\cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0\cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

9. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$　　② $2\sqrt{3}$　　③ $-3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$　　⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$$
$$= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i$$
$$= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i$$
$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$$
$$a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}$$
$$\therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

10. 정수 n에 대하여, $z = i^n + \dfrac{1}{i^n}$을 만족하는 실수의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$z = i^n + \dfrac{1}{i^n}$ 에서

$n = 1$ 일 때, $i + \dfrac{1}{i} = i - i = 0$

$n = 2$ 일 때, $-1 + \dfrac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$

$n = 3$ 일 때, $-i + \dfrac{1}{-i} = 0$

$n = 4$ 일 때, $1 + \dfrac{1}{1} = 2$

따라서, $z = -2,\ 0,\ 2$이므로 3개이다.

11. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$　② $-2i$　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$$x = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^n$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^n + \left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n + \left(-\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n + i^n$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1+1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i+i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1-1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i-i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

12. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

㉠ $f(z) \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　⑤ ㉠, ㉢

해설

㉠ $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\,\bar{w}$

$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

13. $\dfrac{\bar{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\bar{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2의 값을 구하면?

① ±1 ② $\pm2i$ ③ ±2 ④ $\pm i$ ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z=a+bi \\ z=a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\bar{z}}=i$$

$$\frac{\bar{z}^2+\bar{z}+z^2-z}{z\bar{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm1, b=-1$$

$$z=\pm1-i\ ,\ z^2=\pm2i$$

14. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

15. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$ 을 만족하고 $\alpha+\beta=i$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\alpha+\beta=i$에서 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{i}$ $\quad\therefore\ \overline{\alpha}+\overline{\beta}=-i$

$\alpha\overline{\alpha}=1,\ \beta\overline{\beta}=1$에서 $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\ \overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\qquad\therefore\ \alpha\beta=-1$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=i^2-2\cdot(-1)=1$$