

1. 유리식 $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \div \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{x}{x+1}$

② $\frac{x}{x-1}$

③ $\frac{x+2}{x-1}$

④ $\frac{x+2}{(x+1)(x-2)}$

⑤ $\frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

2. 분수식 $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ 을 간단히 하면?

① $-\frac{1}{x+1}$

② $\frac{x+1}{x}$

③ $\frac{x}{x-1}$

④ $\frac{x-1}{x}$

⑤ $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

3. $x : y = 4 : 5$ 일 때, $\frac{x+y}{2x-y}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$x : y = 4 : 5$, $x = 4k, y = 5k (k \neq 0)$ 이므로

$$\frac{x+y}{2x-y} = \frac{4k+5k}{8k-5k} = \frac{9k}{3k} = 3$$

4. $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} \neq 0$ 일 때, $\frac{x-y}{x+y}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{3}{2}$

③ 1

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k (k \neq 0) \text{ 라고 가정하면}$$

$$x = 3k, y = 2k$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} = \frac{3k-2k}{3k+2k} = \frac{1}{5}$$

5. 어떤 수 x 의 8배에 2를 더한 수의 4분의 1은?

① $2x + \frac{1}{2}$

② $x + \frac{1}{2}$

③ $2x + 2$

④ $2x + 4$

⑤ $2x + 16$

해설

$$\frac{8x + 2}{4} = 2x + \frac{1}{2}$$

6. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a$, $y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3 \text{ 에서}$$

$$\text{점근선은 } x = -1, y = 3$$

$$a = -1, b = 3$$

$$a + b = 2$$

7. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{98}{99}$

② $\frac{100}{99}$

③ $\frac{99}{100}$

④ $\frac{101}{100}$

⑤ $\frac{100}{101}$

해설

이항분리 이용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}$$

8. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

9. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것은?

① $ac = bd$

② $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

③ $a + b = c + d$

④ $a - c = b - d$

⑤ $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$

해설

$a : b = c : d$ 이면 $ad = bc$

10. 함수 $y = \frac{1-2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$y = \frac{-2x+1}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2} = \frac{-3}{x-2} - 2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{-3}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로

$$k = -3, a = 2, b = -2$$

$$\therefore k + a + b = -3 + 2 - 2 = -3$$

11. 함수 $y = \frac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x = 3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y = 2$ 이다.

③ 함수 $y = \frac{2}{x} + 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x 축을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y = \frac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y = \frac{2x-4}{x-3} = \frac{2(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x = 3$, $y = 2$ 이고

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼,

y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

12. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ 이므로 } f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2} \text{ 의}$$

역함수를 구하면

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore 2+3+4=9$$

13. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y) \{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

14. 등식 $\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b 의 합을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

양변에 $x(x+1)$ 을 곱하면

$$a(x+1) - bx = 1, ax + a - bx - 1 = 0$$

$$x(a-b) + (a-1) = 0$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a = b, a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

15. 등식 $\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} \text{ 에서}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$a = 2 \text{ 이고 } \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이 때, } b + \frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \text{ 이므로 } b = 1, c = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

16. 0이 아닌 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $2x - 6y + 4z = 0$, $3x + y - 2z = 0$ 이 성립한다. 이때, $\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2}$ 의 값은?

① $\frac{2}{7}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ $\frac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x = y$ 가 나온다.

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2} = \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2}{6x^2} = \frac{5}{6}$$

17. 다음 등식이 성립할 때, 상수 k 의 값은?

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

① -1

② -5

③ -8

④ -10

⑤ -12

해설

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

$$\begin{cases} x+2y = \frac{z}{2} & \cdots \textcircled{1} \\ 2y+z = \frac{3}{4}z & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② 하면

$$x-z = -\frac{1}{4}z, x = \frac{3}{4}z, y = -\frac{1}{8}z$$

$$\frac{x+8y-z}{k} = \frac{\frac{3}{4}z - z - z}{k} = \frac{-\frac{5}{4}z}{k} = \frac{z}{4}$$

$$\therefore k = -5$$

해설

가비의 리에 따라

$$\begin{aligned} \frac{x+2y}{2} &= \frac{6y+3z}{3 \times 3} = \frac{-4z}{4 \times (-4)} \\ &= \frac{x+8y-z}{2+9-16} = \frac{x+8y-z}{-5} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -5$$

18. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{y+3z}{2x} = \frac{3z+2x}{y} = \frac{2x+y}{3z}$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ 1, -2

④ -1, 2

⑤ 2

해설

$$\frac{y+3z}{2x} = \frac{3z+2x}{y} = \frac{2x+y}{3z} = k \text{라 놓는다.}$$

$$\begin{cases} y+3z=2kx & \dots ① \\ 3z+2x=ky & \dots ② \\ 2x+y=3kz & \dots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③을 하면

$$2(2x+y+3z) = k(2x+y+3z)$$

(i) $2x+y+3z \neq 0$ 일 경우 $k=2$

(ii) $2x+y+3z=0$ 일 경우

$$y+3z = -2x \text{를 ①식에 대입하면}$$

$$-2x = 2kx, \quad k = -1$$

$$\therefore k = -1, 2$$

19. $\frac{2x+y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{2z+x}{4}$ 일 때 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{11}$

② $\frac{5}{11}$

③ $\frac{6}{11}$

④ $\frac{8}{11}$

⑤ $\frac{9}{11}$

해설

$$\frac{2x+y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{2z+x}{4} = k \text{ 라 하면}$$

$$2x+y=2k \cdots ①$$

$$2y+z=3k \cdots ②$$

$$2z+x=4k \cdots ③$$

②, ③에서 z 를 소거하면

$$x-4y=-2k \cdots ④$$

$$① \times 4 + ④ \text{ 에서 } x = \frac{2}{3}k, y = \frac{2}{3}k$$

$$\text{이것을 ②에 대입하면 } z = \frac{5}{3}k$$

$$\text{따라서 } x:y:z = \frac{2}{3}k : \frac{2}{3}k : \frac{5}{3}k = 2:2:5$$

$$x=2t, y=2t, z=5t \text{ 라 하면}$$

$$(\text{준식}) = \frac{4t^2 + 10t^2 + 10t^2}{(2t)^2 + (2t)^2 + (5t)^2} = \frac{24t^2}{33t^2} = \frac{8}{11}$$

20. 유리함수 $f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, 실수 k 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 가 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이므로

$$f(x) = f^{-1}(x), f^{-1}(x) = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\frac{kx}{x+3} = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\therefore k = -3$$