

1. 다항식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 을 전개하면?

① $a^2 - b^2$

② $a^3 - b^3$

③ $a^3 + b^3$

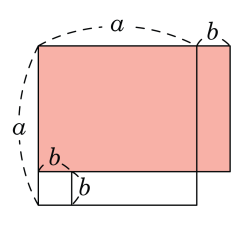
④ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

⑤ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

해설

공식 : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

2. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



- ① $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ② $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ③ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- ④ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- ⑤ $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

해설

$$(a + b)(a - b) = ①' + ②$$
$$①' = ③ \text{ 이므로}$$
$$(a + b)(a - b) = ① + ② = a^2 - b^2$$
$$\therefore (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $ab + bc + ca = 9$, $a + b + c$ 의 값은?

① $-3\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{3}$

③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ &= 9 + 18 = 27\end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c = \pm 3\sqrt{3}$$

4. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \text{ 에서} \\x + y &= 1 - z \\y + z &= 1 - x \\z + x &= 1 - y \\(x + y)(y + z)(z + x) &= (1 - z)(1 - x)(1 - y) \\&= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

5. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

㉠ 11 ㉡ 12 ㉢ 13 ㉣ 14 ㉤ 15

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ ab + bc + ca &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11\end{aligned}$$

6. 모든 모서리의 합이 36, 겹넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하자.

$$4(a + b + c) = 36, \quad 2(ab + bc + ca) = 56$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{대각선의 길이}) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

7. 다음 중에서 겹넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겹넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \therefore d = \sqrt{14}$
 $= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$
 $= 6^2 - 22 = 14$

8. $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 에 대입하면

$$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$$

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\frac{1}{4} = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$$

$$\text{따라서 } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

9. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수= 2
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x 를 곱할 때,
계수= 1
ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
 $x+x^2+x^3=Y$ 라 하면,
 $(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
 $3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수= 3, 다른 항에는 일차항이 없다.
i), ii)에서 $2+1+3=6$

10. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ 를 만족할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

공식 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ 에 주어진 수를 대입하여

$(ab + bc + ca)$ 의 값을 구하면 $(ab + bc + ca) = 12$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

에서

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ 이므로

$\frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0$

$\therefore a = b = c = 2$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 24$

11. 다항식 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ 을 만족시킨다. $f(x^2 - 1)$ 을 구한 것은?

- ① $x^4 + 5x^2 + 1$ ② $x^4 + x^2 - 3$ ③ $x^4 - 5x^2 + 1$
④ $x^4 + x^2 + 3$ ⑤ 답 없음

해설

$$x^2 + 1 = t \text{라 하면 } x^2 = t - 1$$

주어진 식에 대입하면

$$f(t) = (t - 1)^2 + 5(t - 1) + 3$$

$$\therefore f(t) = t^2 + 3t - 1$$

$$\begin{aligned} f(x^2 - 1) &= (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 1 \\ &= x^4 + x^2 - 3 \end{aligned}$$

12. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서
 $(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$
 $(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$
(좌변)
 $= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$
 $= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
 $= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$
따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = c^2$
그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

13. $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때, $\frac{y^{10} + 1}{y^2}$ 의 값은?

- ① 4, -1 ② 4, 18 ③ 8, -1 ④ 9, -1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때

$$y + \frac{1}{y} = 1 \text{ 에서 } \frac{y^2 + 1}{y} = 1$$

$$\therefore y^2 - y + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

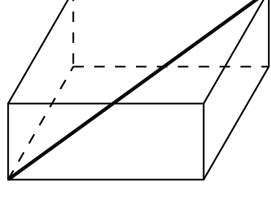
$$\text{양변에 } (y + 1) \text{ 을 곱하면 } (y + 1)(y^2 - y + 1) = 0$$

$$y^3 + 1 = 0 \therefore y^3 = -1 \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{y^{10} + 1}{y^2} &= \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y + 1}{y^2} \\ &= \frac{-y^2}{y^2} = -1 \end{aligned}$$

14. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겹넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



- ① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &= 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16 \\ (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ (a + b + c)^2 &= 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수}) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdots \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \text{에 각각 대입하면} \\ a^3 + b^3 + c^3 - 18 &= 5 \times (9 - 8) \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 23 \end{aligned}$$

15. $a + b = 1$, $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2000} + b^{2006}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a + b = 1$ 에서 $b = 1 - a$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 이므로
 $a^2 + (1 - a)^2 = -1$, $2a^2 - 2a + 2 = 0$, $a^2 - a + 1 = 0$
이 식의 양변에 $a + 1$ 을 곱하면
 $(a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$, $a^3 + 1 = 0$
같은 방법으로 하면
 $b^3 + 1 = 0$ 이므로 $a^3 = -1$, $b^3 = -1$
 $\therefore a^{2000} + b^{2006} = (a^3)^{666} \cdot a^2 + (b^3)^{668} \cdot b^2$
 $= a^2 + b^2 = -1$