1. 다음 보기 중에서 평행사변형이 직사각형이 되기 위한 조건을 모두 몇 개인가?

보기

㉠ 이웃하는 두 변의 길이가 같다.

㉡ 이웃하는 두 각의 크기가 같다.

㉢ 한 내각의 크기가 $90°$ 이다.

㉣ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

㉤ 두 대각선의 길이가 같다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ 마름모가 될 조건
㉡ 직사각형이 될 조건
㉢ 직사각형이 될 조건
㉣ 평행사변형이 될 조건
㉤ 직사각형이 될 조건
∴ ㉡, ㉢, ㉤의 3 개

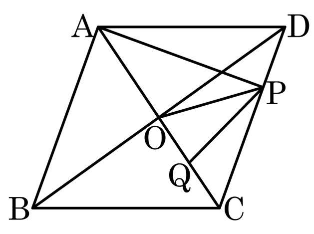
2. 다음 중 평행사변형이 직사각형이 되는 조건은?

① 이웃하는 두 변의 길이가 같다.
② 한 내각의 크기가 직각이다.
③ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
④ 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
⑤ 두 대각선이 수직으로 만난다.

해설

평행사변형의 이웃하는 두 각의 크기의 합이 $180°$ 이므로 한 내각이 $90°$ 임을 증명할 수 있다.

3. 다음 그림의 평행사변형 $\square ABCD$ 에서 $\overline{DP} : \overline{PC} = 1 : 2$ 이고 $\triangle APC = 90°$ 라고 한다. $\overline{OQ} = \overline{QC}$ 일 때, $\triangle OQP$ 의 넓이는 $\square ABCD$ 의 넓이의 몇 배인가?



▶ 답: ______ 배

▷ 정답: $\frac{1}{12}$ 배

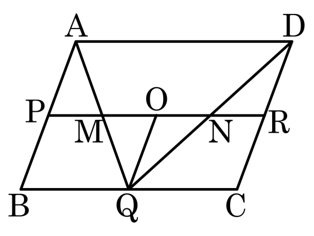
해설

$\triangle OQP = \square ABCD \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \square ABCD \times \frac{1}{12}$

$\therefore \frac{1}{12}$ (배)

4. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 에서 점 P, Q, R 는 각각 변 AB, BC, CD 의 중점이고, 변 PR 의 중점이 점 O 일 때, 다음 중 옳은 것은?



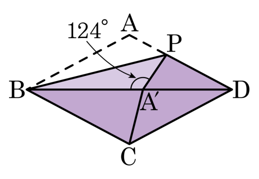
㉠ $\triangle OMQ \equiv \triangle OQN$	㉡ $\triangle APM \equiv \triangle DNR$
㉢ $\triangle ABQ \equiv \triangle DQC$	㉣ $\overline{PB} = \overline{OQ}$
㉤ $\overline{MO} = \overline{ON}$	

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉢, ㉤ ⑤ ㉣, ㉤

해설

$\triangle APM \equiv \triangle MOQ$ 이므로
㉣ $\overline{BP} = \overline{AP} = \overline{OQ}$
$\overline{PM} = \overline{MO}$, $\overline{ON} = \overline{NR}$ 이고
점 O 가 $\overline{PR}$ 의 중점이므로
㉤ $\overline{MO} = \overline{ON}$ 이다.

5. 다음 그림은 마름모 ABCD 의 꼭짓점 A 가 대각선 BD 위에 오도록 접은 것이다. $\angle BA'P = 124°$ 일 때, $\angle A'CD$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답: $\underline{\qquad}$ °

▷ 정답: 48°

해설

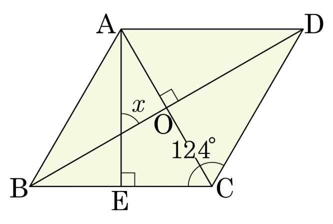
$\angle CBA' = (180° - 124°) \div 2 = 28°$

$\overline{BA'} = \overline{BC}$ 이므로

$\angle BCA' = (180° - 28°) \div 2 = 76°$

$\therefore\ \angle A'CD = 124° - 76° = 48°$

6. 다음 그림과 같은 마름모 ABCD 에서 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 이고 $\angle C = 124°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : ______°

▷ 정답 : 62°

해설

$\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 가 만나는 점을 O 라고 할 때, 삼각형 BOC 과 DOC 는 합동이다.
그러므로 $\angle BCD$ 는 이등분된다. $\angle BCA = 62°$
삼각형 AEC 의 내각의 합에 의해서 $\angle EAC = 28°$ 가 된다.
그러므로 $\angle x = 62°$ 가 된다.

7. 다음 중 평행사변형이 마름모가 되는 조건의 개수는?

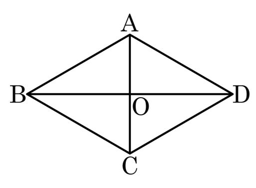
㉠ 한 내각의 크기가 직각이다.
㉡ 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.
㉢ 두 대각선의 길이가 같다.
㉣ 두 대각선이 직교한다.
㉤ 이웃하는 두 변의 길이가 같다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉡, ㉣, ㉤ 평행사변형이 마름모가 되려면 두 대각선이 서로 수직이등분하면 되고, 네 변의 길이가 모두 같으면 된다. 두 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

8. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 가 마름모일 때, 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



① $\overline{AO}$ 와 $\overline{OD}$ 는 직교한다.

② $\angle ABO = \angle OBC$

③ $\overline{OA}$ 와 $\overline{OB}$ 의 길이는 같다.

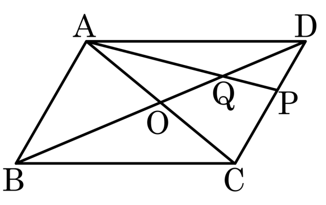
④ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

⑤ $\overline{OA}$ 와 $\overline{OC}$ 의 길이는 같다.

해설

평행사변형이 마름모가 되려면 두 대각선이 직교하거나 이웃하는 두변의 길이가 같아야 한다.
③ $\overline{OA}$ 와 $\overline{OB}$ 의 길이는 같다는 것은 직사각형이 될 조건이다.

9. 평행사변형ABCD 에서 $\overline{CP} : \overline{PD} = 3 : 2$, $\overline{AQ} : \overline{QP} = 5 : 2$ 일 때, $\triangle AOQ$ 는 전체 넓이의 몇 배인지 구하여라



▶ 답: ______ 배

▷ 정답: $\frac{3}{28}$ 배

해설

평행사변형ABCD 의 넓이를 S 라 두면, $\triangle ACD = \frac{1}{2}S$

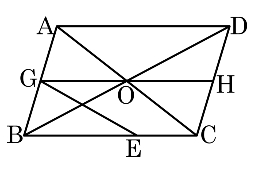
$\overline{CP} : \overline{PD} = 3 : 2$ 이므로 $\triangle ACP = \frac{3}{5}\triangle ACD = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{3}{10}S$

그리고 $\triangle OAP = \frac{1}{2}\triangle ACP$, $\therefore \triangle OAP = \frac{3}{20}S$

또한 $\overline{AQ} : \overline{QP} = 5 : 2$ 이므로 $\triangle AOQ = \frac{5}{7}\triangle OAP$

따라서 $\triangle AOQ = \frac{5}{7}\triangle OAP = \frac{5}{7}\left(\frac{3}{20}S\right) = \frac{3}{28}S$

10. 다음 그림의 평행사변형 ABCD 에서 점 O 는 두 대각선의 교점이고, $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{CD}}$ 의 중점이 각각 G, H 이다. $\triangle\mathrm{GBE}$ 의 넓이가 $2a$ 이고, $\overline{\mathrm{BE}} : \overline{\mathrm{EC}} = 2 : 1$ 일 때, 평행사변형 ABCD 의 넓이를 a 에 관해서 나타낸 것은?

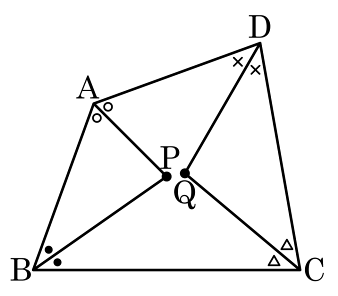


① $6a$ ② $9a$ ③ $12a$ ④ $16a$ ⑤ $24a$

해설

$\triangle\mathrm{GBE}$ 는 $\triangle\mathrm{OBE}$ 와 밑변과 높이의 길이가 같으므로 넓이가 서로 같다.
또한 $\triangle\mathrm{OBE}$ 와 $\triangle\mathrm{OEC}$ 의 높이가 같고 밑변의 길이가 $2 : 1$ 이므로 넓이의 비도 $2 : 1$ 이다.
따라서 $\triangle\mathrm{OEC}$ 의 넓이는 a 이고, $\triangle\mathrm{OBC}$ 의 넓이는 $3a$ 이다.
$\therefore$ 평행사변형 ABCD 의 넓이는
$4 \times \triangle\mathrm{OBC} = 4 \times 3a = 12a$ 이다.

11. 사각형 ABCD 에서 $\angle\mathrm{A}$ 와 $\angle\mathrm{B}$ 의 이등분선의 교점을 P , $\angle\mathrm{C}$ 와 $\angle\mathrm{D}$ 의 이등분선의 교점을 Q 라 할 때, $\angle\mathrm{APB}+\angle\mathrm{DQC}$ 의 크기를 구하여라.



① $90°$ ② $150°$ ③ $180°$ ④ $210°$ ⑤ $240°$

해설

$\angle\mathrm{PAB}=a$, $\angle\mathrm{PBA}=b$, $\angle\mathrm{DCQ}=c$, $\angle\mathrm{CDQ}=d$ 라 하면,
□ABCD 에서
$2a+2b+2c+2d=360° \therefore\ a+b+c+d=180°$
$\triangle\mathrm{ABP}$ 와 $\triangle\mathrm{DQC}$ 에서
$a+b+\angle\mathrm{APB}+c+d+\angle\mathrm{DQC}=360°$
$\therefore\ \angle\mathrm{APB}+\angle\mathrm{DQC}=180°$

12. 다음은 '직사각형의 두 대각선은 길이가 같다.' 를 증명하는 과정이다. $\boxed{}$ 안에 들어갈 말로 옳은 것은?

(가정) □ABCD 에서 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$
(결론) $\overline{AC} = \overline{BD}$
(증명) 직사각형은 평행사변형이므로 △ABC 와 △DCB 에서
$\overline{AB} = \overline{CD}$,
$\angle ABC = \angle DCB$ (가정)
$\overline{BC}$ 는 공통
$\boxed{}$
따라서, 직사각형의 두 대각선의 길이는 같다.

① 즉, △ABC ≡ △DCB (ASA 합동) 이므로 $\overline{AC} = \overline{AB}$ 이다.
② 즉, △ABC ≡ △DCB (ASA 합동) 이므로 $\overline{AC} = \overline{AD}$ 이다.
③ 즉, △ABC ≡ △DCB (SAS 합동) 이므로 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 이다.
④ 즉, △ABC ≡ △DCB (SAS 합동) 이므로 $\overline{AC} = \overline{AB}$ 이다.
⑤ 즉, △ABC ≡ △DCB (SAS 합동) 이므로 $\overline{AC} = \overline{AD}$ 이다.

해설

(가정) □ABCD 에서 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$
(결론) $\overline{AC} = \overline{BD}$
(증명) 직사각형은 평행사변형이므로 △ABC 와 △DCB 에서
$\overline{AB} = \overline{CD}$,
$\angle ABC = \angle DCB$ (가정)
$\overline{BC}$ 는 공통
즉, △ABC ≡ △DCB (SAS 합동) 이므로 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 이다.
따라서 직사각형의 두 대각선의 길이는 같다.