1. $-2 \le x \le 2$일 때, $\dfrac{20}{3-x}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$-2 \le x \le 2$에서

$-2 \le -x \le 2$,

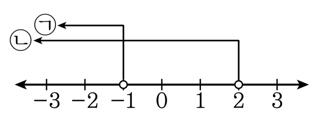
$1 \le 3-x \le 5$

$\dfrac{1}{5} \le \dfrac{1}{3-x} \le 1$

$\therefore 4 \le \dfrac{20}{3-x} \le 20$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 24

2. 다 음 은 연 립 부 등 식 $\begin{cases} ax+b<0\cdots ㉠ \\ cx+d>0\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타낸 것이다. 이 때, 연립부등식의 해는?



① $x<-1$ ② $x<2$ ③ $-1<x<2$

④ $-1\le x<2$ ⑤ $x>-1$

해설

$x<-1$과 $x<2$ 의 공통부분이 연립부등식의 해이다.

$\therefore\ x<-1$

3. $A < B < C$ 꼴의 문제를 풀 때 알맞은 것은?

① $\begin{cases} A < B \\ A < C \end{cases}$ ② $\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ ③ $\begin{cases} A < C \\ B < C \end{cases}$

④ $\begin{cases} B < A \\ B < C \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} A < B \\ C < B \end{cases}$

해설

$A < B < C$ 꼴의 부등식은

$\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$ 로 고쳐서 푼다.

4. 어떤 수를 3 배 하고 8 을 빼면 32 보다 작고, 어떤 수에서 5 를 빼고 6 배 하면 24 보다 크다고 한다. 어떤 수의 범위로 옳은 것은?

① $8 < x < \frac{37}{3}$　② $8 < x < \frac{40}{3}$　③ $9 < x < \frac{37}{3}$
④ $9 < x < \frac{40}{3}$　⑤ $9 < x < \frac{43}{3}$

해설

어떤 수를 x 라고 하고 문제의 조건을 이용하여 두 개의 식을 만든다. '어떤 수를 3 배 하고 8 을 빼면 32 보다 작고.' 를 식으로 표현하면, $3x - 8 < 32$ 이고, '어떤 수에서 5 를 빼고 6 배 하면 24 보다 크다' 를 식으로 표현하면, $6(x-5) > 24$ 이다.

두 개의 부등식을 연립부등식으로 표현하면, $\begin{cases} 3x - 8 < 32 \\ 6(x-5) > 24 \end{cases}$

이다. 이를 간단히 하면, $\begin{cases} x < \frac{40}{3} \\ x > 9 \end{cases}$ 따라서 $9 < x < \frac{40}{3}$ 이다.

5. 부등식 $|2x-1| \geq 3$을 풀면?

① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$
② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$
④ $x < 1$ 또는 $x > 2$
⑤ $x \leq 1$ 또는 $x > 2$

해설

$|2x-1| \geq 3$에서
$2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$ 정리하면 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

6. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} 2(2x-3) > x+3 \\ 5x-9 < 3x+7 \end{cases}$$

① $2 < x < 8$ ② $3 < x < 9$ ③ $3 < x < 8$
④ $5 < x < 9$ ⑤ $4 < x < 10$

해설

ⅰ) $2(2x-3) > x+3$
$\Rightarrow 4x-6 > x+3$
$\Rightarrow x > 3$
ⅱ) $5x-9 < 3x+7$
$\Rightarrow 2x < 16$
$\Rightarrow x < 8$
$\therefore 3 < x < 8$

7. 다음 연립부등식을 만족하는 가장 큰 정수는?

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3) \\ 0.5(x-9) < 0.2(x-3) \end{cases}$$

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 13

해설

i) $\frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3)$ 의 양변에 15 를 곱해 주면,

$\Rightarrow 6(4x-1) > 5(2x+3)$

$\Rightarrow x > \frac{3}{2}$

ii) $0.5(x-9) < 0.2(x-3)$ 의 양변에 10 을 곱해 주면,

$\Rightarrow 5(x-9) < 2(x-3)$

$\Rightarrow x < 13$

$\therefore \frac{3}{2} < x < 13$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+7 \geq 3x \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 3 개일 때, a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4 < a \leq 5$

해설

$2x+7 \geq 3x$ 를 풀면 $x \leq 7$ 이다.
$a \leq x \leq 7$ 을 만족하는 정수 3 개가 존재하려면 $4 < a \leq 5$ 이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} 10 - 2x \geq 3x \\ x - a > -3 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > 2$ ② $a \leq 2$ ③ $a \geq 5$
④ $a \leq 5$ ⑤ $2 < a < 5$

해설

$\begin{cases} 10 - 2x \geq 3x & \rightarrow \ 2 \geq x \\ x - a > -3 & \rightarrow \ x > a - 3 \end{cases}$

$a - 3 \geq 2$

$\therefore \ a \geq 5$

10. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \leq 200(9-x)+500x \leq 3600$

$$\begin{cases} 2800 \leq 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \leq 3600 \end{cases}$$

$\therefore \frac{10}{3} \leq x \leq 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

11. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 1$　② $a < -\frac{1}{3}$　③ $a \geq -\frac{1}{3}$

④ $a \leq -\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{3} < a < 1$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a < 0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2 + (a+1)x + a = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$D = (a+10)^2 - 4a^2 < 0,\ -3a^2 + 2a + 1 < 0$
$3a^2 - 2a - 1 > 0,\ (3a+1)(a-1) > 0$
$\therefore a < -\frac{1}{3}$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a < -\frac{1}{3}$
따라서 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면
$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

12. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$㈎
㈎를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1,2,3,\cdots,9$ 의 9개이다.

13. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면
$-8 \le x^2-8 \le 8$
$0 \le x^2 \le 16$
$\therefore -4 \le x \le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면
$-k<x-2<k$
$-k+2<x<k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면
$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로
$k \le 6,\ k \le 2$
$\therefore 0<k \le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

14. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

$$x^2 < 3x + 40\ ,\ 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40$,　$x^2 - 3x - 40 < 0$,
$(x-8)(x+5) < 0$,　$-5 < x < 8$
$3x^2 - 7x \geq 40$,　$3x^2 - 7x - 40 \geq 0$
$(3x+8)(x-5) \geq 0$,
$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\frac{8}{3} \rightarrow$
공통범위는 $-5 < x \leq -\frac{8}{3}$,　$5 \leq x < 8$
정수는 $-4,\ -3,\ 5,\ 6,\ 7$: 5개이다.

15. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$　② $x \le -1$　③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$　⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\frac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

16. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

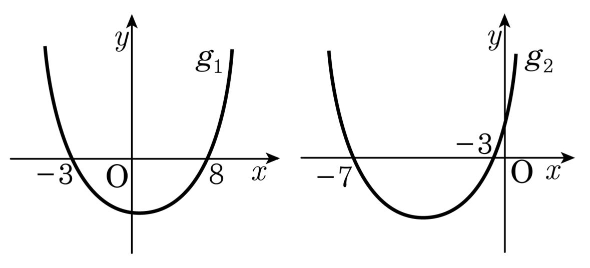
$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

17. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\dfrac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

18. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 이차함수 $y = 2x^2 - 2mx + 1$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $-3 < m < 3$ ② $-3\ m < 1$

③ $-1 < m < 3$ ④ $m < -1$또는$m > 1$

⑤ $m < -1$또는$m > 3$

해설

$x^2 - 2x - 3 < 2x^2 - 2mx + 1$ 에서
$x^2 - 2(m-1)x + 4 > 0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = (m-1)^2 - 4 < 0$ 에서
$(m+1)(m-3) < 0$
$\therefore -1 < m < 3$

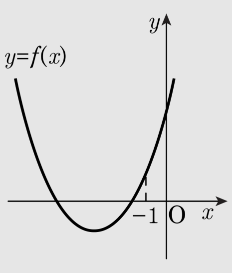
19. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서

$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$

이상에서 $-7<k<-3$

따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

20. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

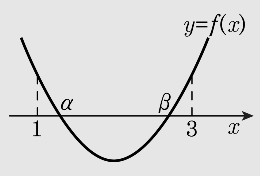
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

21. 연립부등식 $-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$ 의 해가 $\frac{2}{5} < x < b$ 일때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$

$\rightarrow \begin{cases} -7.2 < 2x-a \\ 2x-a < -6x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x > \frac{a-7.2}{2} \\ x < \frac{a}{8} \end{cases}$

$\frac{a-7.2}{2} < x < \frac{a}{8}$ 가 $\frac{2}{5} < x < b$ 이므로

$\frac{a-7.2}{2} = \frac{2}{5}$

$5a-36 = 4$

$\therefore\ a = 8$

$\therefore\ b = \frac{a}{8} = \frac{8}{8} = 1$

22. x보다 크지 않은 최대의 정수와 x보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ ② $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ ③ $\{x|2 \leq x < 3\}$

④ $\{x|2 < x \leq 3\}$ ⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$를 x보다 크지 않는 최대의 정수,

$< x >$를 x보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.

$x = n$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n$이므로 $n + n = 5,\ \ n = \frac{5}{2}$

$\therefore$ 적당하지 않다.

$n < x < n + 1$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n + 1$이므로 $n + n + 1 = 5$

$\therefore n = 2$

$\therefore 2 < x < 3$

23. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$　　② $-1 \le x \le 1$　　③ $x \ge 1$

④ 해는 없다.　　⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2)$, $x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2$, $x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

24. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은 ?

① -7　　② -5　　③ 5　　④ 7　　⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면

(ⅰ) $x \geq -1$ 일 때

$5-x>2x+2,\ x<1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$

(ⅱ) $x<-1$ 일 때

$5-x>-2x-2,\ x>-7 \quad \therefore -7<x<-1$

(ⅰ), (ⅱ) 에 따라 $-7<x<1$

$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고

$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-6 \quad \therefore\ a+b=-7$

25. x에 대한 두 부등식 $x^2 + (a-1)x < a$, $6x^2 - x - 1 > 0$을 동시에 만족하는 정수가 꼭 두 개 존재할 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \le a < -3,\ 2 < a \le 3$　② $-3 \le a < -2,\ 3 < a \le 4$

③ $-2 \le a < -1,\ 4 < a \le 5$　④ $-4 < a \le -3,\ 2 \le a < 3$

⑤ $-3 < a \le -2,\ 3 \le a < 4$

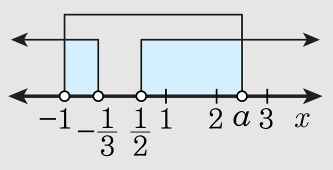
해설

$6x^2 - x - 1 = (2x-1)(3x+1) > 0$

$\Leftrightarrow\ x > \frac{1}{2}$ 또는 $x < -\frac{1}{3}$ ······㉠

$x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a) < 0$

(i) $a > -1$이면 $-1 < x < a$ ······㉡

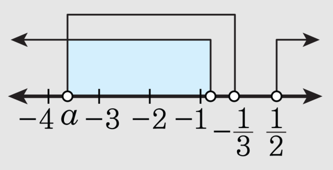


㉠과 ㉡의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 1과 2)

$2 < a \le 3$

(ii) $a = -1$이면 해가 없다.

(iii) $a < -1$이면 $a < x < -1$ ······㉢



㉠, ㉢의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 -3과 -2)

$\therefore\ -4 \le a < -3$

(i),(ii)(iii)에서 $-4 \le a < -3,\ 2 < a \le 3$