1. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0,\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3, \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3i}}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3i}}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3i}}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 연립방정식 $ax+by=8,\ \ 2ax-by=-2$의 근이 $x=1,\ \ y=2$일 때, $a,\ b$의 값은?

① $a=-2,\ b=-3$ ② $a=3,\ b=2$

③ $a=2,\ b=-3$ ④ $a=2,\ b=3$

⑤ $a=-3,\ b=-2$

해설

$ax+by=8$, $2ax-by=-2$
근이 $x=1, y=2$이므로

$$\begin{cases} a+2b=8 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}$$

$\therefore\ a=2, b=3$

3. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서

$x^2 = t$로 치환하면

$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

4. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$의 두 근이 $-3,\ 1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1 + \sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = (1 - \sqrt{2})\left(1 + \sqrt{2}\right) + (-3)\left(1 - \sqrt{2}\right) + (-3)\left(1 + \sqrt{2}\right) = -7$$

$$b = -\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)(-3) = -3$$

$$\therefore\ a + b = -10$$

5. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

6. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\ \ \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

7. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

8. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5,\ 2x^2 + 2x - 4 = 0,$

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2,$

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ii) $x = 2y$일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를

$x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

11. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서

$x^2+x=A$ 라 하면

$A^2+2A-8=0$,

$(A+4)(A-2)=0$

$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$

(i) $x^2+x=-4$ 일 때,

$x^2+x+4=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $x^2+x=2$ 일 때,

$x^2+x-2=0$,

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은

$-2+1=-1$

12. 두 다항식 $f(x)=x^3-5, g(x)=x^3+3x+1$에 대하여 $f(x)=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값은?

① 350 ② 351 ③ 352 ④ 353 ⑤ 354

해설

$f(x)=0$의 세 근이 α,β,γ 라고 하면 $\alpha^3=5,\beta^3=5,\gamma^3=5$ 이다.

$g(\alpha)=\alpha^3+3\alpha+1=3\alpha+6,\ g(\beta)=\beta^3+3\beta+1=3\beta+6,$
$g(\gamma)=\gamma^3+3\gamma+1=3\gamma+6\ g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$
$=(3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6)=351\ (\because \alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=5)$

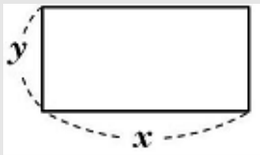
13. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5$ ……㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

14. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x,\ y$ 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4)=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=-4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

15. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0,\ x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$ ㉠

$t^2+at+1=0\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$: $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

16. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

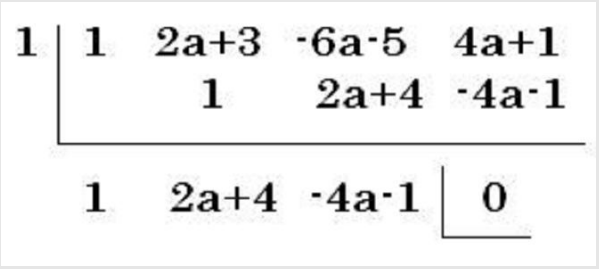
① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$ ② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$

③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$ ④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$

⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.



조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\{x^2+2(a+2)x-4a-1\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

17. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$

$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$

$abc \neq 0,\quad abc = 1,$

$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$

$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$

그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$

18. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α이므로

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$

두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$

$k=0$ 또는 $\alpha=1$

$k=0$이면 두 식이 같아지므로

조건에 맞지 않는다.

$\therefore$ $\alpha=1$을 대입하면

$3-(k+1)+4k=0, \quad k=-\frac{2}{3}$

$\therefore$ $3k+\alpha=-1$

19. 2년 전의 A와 B의 임금은 서로 같았으나 그 해 A의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B의 임금은 2년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 a% 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

2년 전 두 사람의 임금을 k원이라면
올해 A와 B의 임금은 각각
$A : k(1+0.08)(1+0.47)$
$B : k\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$
따라서
$(100+a)^2 = 108\times 147 = 3\times 3\times 6\times 6\times 7\times 7$
$\therefore\ 100+a = 126$
$\therefore a = 26$