1. 다음 보기에 주어진 수를 x라 할 때, $\sqrt{x}$가 허수가 되는 x의 개수는?

$-2,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -3.5,\ 4,\ -\frac{2}{5}$

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 7 개 ⑤ 9 개

해설

$\sqrt{x}$가 허수가 되는 $x = -2,\ -3.5,\ -\frac{2}{5}$ 의 3개이다.

2. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4 개,
$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로
$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

3. 다음 보기에서 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$　② $-1-\sqrt{2}$　③ $(1+\sqrt{2})i$
④ $-(1+\sqrt{2})i$　⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1)\times(-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

5. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16} = -4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

6. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15　　② 25　　③ 35　　④ 45　　⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

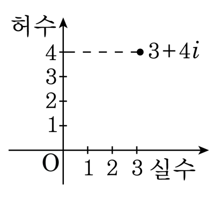
$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

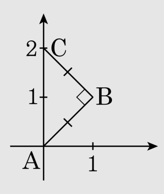
7. 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z = 1 + i$일 때, $0,\ z,\ z^2$ 이 나타내는 점을 각각 $A,\ B,\ C$ 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



① 정삼각형
② 이등변삼각형
③ 직각삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 답 없음

해설

$z = 1 + i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형
※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

8. $\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x들의 총합은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{-x^2(x^2-1)^2} &= \sqrt{x^2(x^2-1)^2}i \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{(x^2-1)^2}i \\ &= |x|\cdot|x^2-1|i \\ &= |x|\cdot|x+1||x-1|i\end{aligned}$$

그러므로 $x=0,\ 1,\ -1$일 때 총합은 0이 된다.

9. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

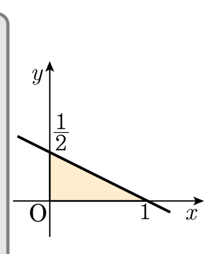
(준식) $= (2x-2y)+(x+2y-1)\,i = 0$

$\therefore\ x+2y-1=0$,

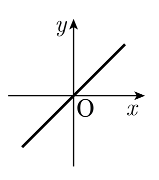
$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

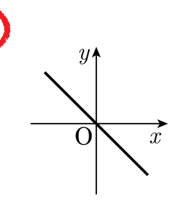
$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

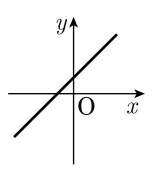
$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$

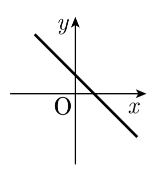


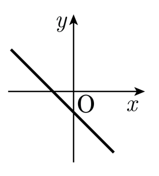
10. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z=x+yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가 ? (단, $x,\ y$는 실수)

①


②


③


④


⑤


해설

$$\begin{aligned}(3+2i)(x+yi) &= 3x+3yi+2xi-2y \\ &= (3x-2y)+(2x+3y)i\end{aligned}$$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

11. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선　　② 기울기가 음인 직선

③ 위로 볼록한 포물선　　④ 아래로 볼록한 포물선

⑤ 원

해설

$$(3-4i)z = (3-4i)(x+yi)$$
$$= (3x+4y) + (-4x+3y)i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \frac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$ 기울기가 양인 직선)

12. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1　　② 1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 2

해설

복소수 z를 $a + bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 정리하면
$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$이면 $z = 0 + 0i = 0$이므로
$z \neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x = -1$

13. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?
(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$ ② $z + \bar{z} = 0$

③ $z + \bar{z} = 1$ ④ $z + \bar{z} = -1$

⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$\therefore z\bar{z} = 1$

14. $z=(1+i)x^2+(2-i)x-8-2i$에 대하여 $z^2<0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$z=(x^2+2x-8)+(x^2-x-2)i$
$\quad=(x-2)(x+4)+(x+1)(x-2)i$
그런데, $z^2<0$에서 z는 순허수이므로
$\therefore\ x=-4$

15. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$

i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$

$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$㉠

$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

16. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면
$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$
실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0 \therefore\ x=-3,\ -1$
순허수가 되기 위해서는
$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$
$x=-1,\ 2$이고 $x\neq -3,\ -1 \therefore\ x=2$
$(-3)\times(-1)\times 2=6$

17. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$
$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$
$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$
만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.
$a \neq 2$, $\therefore\ a=-4$

18. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 x, y는 실수이다.)

① 2 또는 -4 ② 2 또는 -3 ③ -1 또는 3
④ -1 또는 -3 ⑤ -1 또는 -2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)i$
$z^2=-9$
즉, z는 순허수이다.
$\therefore x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$
$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm 3$을 연립하여 풀면
$y=\frac{2}{3} \rightarrow x=\frac{4}{3}$
$y=-\frac{4}{3} \rightarrow x=-\frac{8}{3}$
$\therefore x+y=2$ 또는 -4 이다.

19. 복소수 $z = (1+i)x+1-2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$z = (1+i)x+1-2i = (x+1)+(x-2)i$

z^2의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore\ x+1=0,\ \ x=-1$

20. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

21. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$(\text{준식}) = \left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2+3a+2=0$
$a^2+2a \neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

22. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$
$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$
순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$
$\therefore\ x=-2$

23. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

24. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면
$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$
이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$
$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$
$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

25. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 x, y라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$x-y=5x-2, \quad y-2=-3x$

$\therefore \ x=0, \ y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때.

$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$-x+y=5x-2, \ y-2=-3x$

$\therefore \ x=\frac{4}{9}, \ y=\frac{2}{3}$

$\therefore \ \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

26. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10$ ⋯㉠, $yz-x=0$ ⋯㉡

㉡을㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(3, 1, 3)$ 3개

27. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.
$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$
$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$
$\therefore\ (xy$의 최댓값$) = 4$

28. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{5}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore\ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y < x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (성립)

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

29. x, y가 양의 실수이고, $x^2+xyi+y^2-5-2i=0$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2+y^2-5)+(xy-2)i=0$

$x^2+y^2-5=0\cdots$㉠

$xy-2=0\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=5+4=9$

$\therefore\ x+y=3$ ($\because$ x, y는 양의 실수)

30. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6,\ 4x+y=2$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

31. 실수 x, y 대하여 $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{5}$

해설

$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=2-i$

$\frac{(x+y)-(x-y)i}{2}=2-i$

$(x+y)-(x-y)i=4-2i$

복소수의 상등에 의해서

$x+y=4\cdots$㉠, $x-y=2\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $x=3,\ y=1 \quad \therefore\ 2x+y=7$

32. 실수 x, y 에 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8　　② 7　　③ 5　　④ 4　　⑤ 2

해설

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$

$\therefore\ \dfrac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=2-i$ 이므로,

복소수의 상등에서 $x+y=4,\ -x+y=-2$

이것을 풀면 $x=3,\ y=1$

따라서, $2x+y=2\times3+1=7$

33. 복소수 $z=1+4i$일 때, $\overline{x(2-i)}+y(1-i)=\bar{z}$가 성립하도록 하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$)

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$z=1+4i$이므로 $\bar{z}=1-4i$이다.
주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i)}+y(1-i)&=\bar{x}(\overline{2-i})+y(1-i)\\&=x(2+i)+y(1-i)\end{aligned}$$

$\therefore\ x(2+i)+y(1-i)=1-4i$
$(2x+y)+(x-y)i=1-4i$
복소수가 서로 같을 조건에서
$2x+y=1,\ x-y=-4$
위 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=3$
$\therefore\ x+y=2$

34. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$

$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$

$-x^2-3ax+5=0\cdots$ ⓐ

$x^2-3x+2=0\cdots$ ⓑ

ⓑ을 인수분해하면,

$(x-1)(x-2)=0,\ \therefore\ x=1,\ 2$

ⓐ에 대입하면,

$x=1$일 때, $-1-3a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{4}{3}$

$x=2$일 때, $-4-6a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3}, \beta=\frac{1}{6} (\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

35. n 개의 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 는 $1, -1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 중에서 하나의 값을 가진다고 한다. 보기 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=0$, $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=0$ 이라고 할 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 300　② 303　③ 305　④ 308　⑤ 310

해설

$a_1, a_2, \cdots a_n$ 중 1이 a 개, -1 이 b 개 , $\sqrt{2}i$ 가 c 개, $-\sqrt{2}i$ 가 d 개 있다고 하면, a, b, c, d 는 음이 아닌 정수

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

$= 1 \times a + (-1) \times b + (\sqrt{2}i) \times c + (-\sqrt{2}i) \times d$

$= a - b + \sqrt{2}i\,(c-d) = 0$

a, b, c, d 는 실수이므로 $a-b, c-d$ 도 실수

복소수의 상등에 의해 $a = b,\ c = d \cdots$①

$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$

$= 1^2 \times a + (-1)^2 \times b + (\sqrt{2}i)^2 \times c + (-\sqrt{2}i)^2 \times d$

$= a + b - 2c - 2d = (a+b) - 2(c+d) = 0$

$a + b = 2(c+d)$

$2a = 4c(\because$ ①$)$

$\therefore\ a = 2c$

$\therefore\ a : b : c : d = 1 : 1 : 2 : 2$

$\therefore\ n = a + b + c + d = 6a$, n 은 6 의 배수

36. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ 1 ⑤ -1

해설

$$
\begin{aligned}
i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2 i - 3x - i) \\
&= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i
\end{aligned}
$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$\therefore\ x = 0,\ \pm\sqrt{3}$

37. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\dfrac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\dfrac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\dfrac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$