

1. 두 집합 $A = \{6, 12\}$, $B = \{12, a\}$ 가 서로 같을 때, a 의 값으로 옳은 것은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

두 집합 A, B 가 서로 같으므로 $\{6, 12\} = \{12, a\}$

따라서 $6 = a$

2. 다음 중 집합 $\{1, 2, 4\}$ 의 진부분집합인 것을 모두 구하여라.

㉠ $\emptyset$

㉡ $\{1, 2\}$

㉢ $\{x \mid x \text{ 는 } 4 \text{ 의 약수}\}$

㉣ $\{x \mid x \text{ 는 } 5 \text{ 보다 작은 자연수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉠

▶ 정답 : ㉡

해설

$\{1, 2, 4\}$ 의 진부분집합은 $\{1, 2, 4\}$ 의 부분집합 중 $\{1, 2, 4\}$ 를 제외한 나머지 부분집합이다.

㉢ $\{x \mid x \text{ 는 } 4 \text{ 의 약수}\} = \{1, 2, 4\}$ 이다. 진부분집합은 자신을 제외한 것이므로 진부분집합이 아니다.

㉣ $\{x \mid x \text{ 는 } 5 \text{ 보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다. 따라서 $\{1, 2, 4\}$ 의 부분집합이 아니다.

3. 다음은 지성이가 부분집합의 개수를 구하기 위해 자신이 생각한 방법을 친구에게 설명한 것이다.

공집합의 부분집합의 개수는 1개야. 원소가 한 개인 집합의 부분집합의 개수는 원소가 없는 집합 1개와 원소가 1개인 집합 1개로 모두 2개야. 원소가 두 개인 집합의 부분집합의 개수는 원소가 없는 집합 1개, 원소가 1개인 집합 2개, 원소가 2개인 집합 1개로 모두 4개야. 이와 같은 방법으로 원소가 3개인 집합의 부분집합의 개수도 쉽게 구할수 있어. 이상을 정리하여 각 단계를 수로 나타내면 다음과 같음을 알수 있어.

원소가 없는 집합(공 집합)	1	...	1개
원소가 1개인 집합	1	1	... 2개
원소가 2개인 집합	1	2	1 ... 4개
원소가 3개인 집합	1	3	3 1 ... 8개

같

은 방법으로 집합 {가, 나, 다}의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8개

해설

- ① {가, 나, 다}의 부분집합을 원소의 개수에 따라 구한다.

원소가 0개 : $\emptyset$

원소가 1개 : {가}, {나}, {다}

원소가 2개 : {가, 나}, {나, 다}, {다, 가}

원소가 3개 : {가, 나, 다}

따라서 부분집합의 개수는 8개이다.

- ② 원소의 개수만큼 2를 곱한다.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$$

4. 다음은 수진, 영우, 희망이가 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B \subset A$ 일 때, 두 집합사이의 관계를 표현한 것이다. 바르게 표현한 사람은 누구인지 말하여라.

수진 : $A - B = \emptyset$

영우 : $A \cap B = A$

희망 : $B - A = \emptyset$

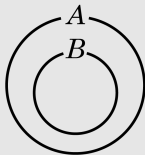
▶ 답 :

▶ 정답 : 희망

해설

$B \subset A$ 이면 집합 A, B 는 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.

따라서 $B - A = \emptyset$, $A \cap B = B$ 이다.



5. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

6. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 11 \text{보다 작은 홀수}\}$ 일 때,
 $n(A) + n(B)$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로 $n(B) = 5$

$\therefore n(A) + n(B) = 7 + 5 = 12$

7. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, 조건 p 를 만족시키는 집합 P 와 조건 q 를 만족시키는 집합 Q 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $Q \subset P$

② $Q^c \subset P^c$

③ $Q \subset P^c$

④ $Q^c \subset P$

⑤ $Q = P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$$\therefore Q^c \subset P^c$$

8. 명제 ' x 가 소수이면 x 는 홀수이다.'는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

9. 세 실수 a, b, c 사이에 두 관계식 $3a - b + c = 2$, $a + b + c = 4$ 가 성립한다. $a > 1$ 일 때, a, b, c 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $a < b < c$

② $a < c < b$

③ $b < c < a$

④ $c < a < b$

⑤ $c < b < a$

해설

$$3a - b + c = 2 \cdots \cdots ①$$

$$a + b + c = 4 \cdots \cdots ②$$

$$① + ② \text{ 하면 } 4a + 2c = 6$$

$$2a + c = 3, a > 1 \text{ 이므로}$$

$$c = 3 - 2a \text{ 에서 } c < 1$$

$$① - ② \text{ 하면 } 2a - 2b = -2$$

$$\therefore a - b = -1, b = a + 1 \text{ 이므로}$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } b > a$$

$$\therefore c < a < b$$

10. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(2)$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\therefore (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$$

11. 함수 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$) 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x$ ($x \geq 1$)

② $y = x^2 - 2x$ ($x \leq 1$)

③ $y = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)

④ $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1$ ($x \leq 1$)

해설

$$y = x^2 - 2x \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+1, x-1 = \sqrt{y+1} \quad (\because x \geq 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \sqrt{x+1} + 1$$

이 때, 원래의 함수

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 1) \text{의 치역}$$

$\{y|y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 의 정의역이 되므로
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

12. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

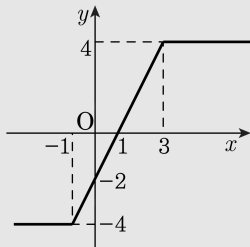
$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음을 만족할 때, $n(A) + n(B)$ 의 값은?

보기

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A^c \cap B = \{3, 4\}$$

$$A^c \cup B^c = \{1, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$$

① 3

② 7

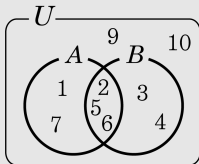
③ 9

④ 11

⑤ 13

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 6 + 5 = 11$$

14. 다음 보기의 명제 중 ‘역’과 ‘대우’가 모두 참인 명제를 모두 고르면?

㉠ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.

㉡ 실수 x, y 에 대하여 $x + y > 2$ 이면 $x > 1$ 또는 $y > 1$ 이다.

㉢ $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = \angle B$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이고, n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이므로 명제와 그 역이 모두 참이다. 따라서 역과 대우 모두 참이다.

㉡ 역 ‘ $x > 1$ 또는 $y > 1$ 이면 $x + y > 2$ ’에서 $x = 2, y = -3$ 일 때 $2 - 3 < 2$ 이므로 거짓이다. 대우 ‘ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 2$ ’는 참이다.

㉢ 역 ‘ $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이면 $\angle A = \angle B$ ’는 $\angle A = \angle C$ 또는 $\angle B = \angle C$ 일 때도 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로 거짓이다. 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다. 따라서 역과 대우가 모두 참인 것은 ㉠뿐이다.

15. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은? (단, a, x, y 는 실수)

① $p : a < 0, q : \sqrt{a^2} = -a$

② $p : xy < 0, q : x < 0$ 이고 $y > 0$

③ $p : xy = 0, q : x = 0$ 또는 $y = 0$

④ $p : A \cup (B - A) = B, q : A \subset B$

⑤ $p : x, y$ 가 유리수, $q : x + y, xy$ 가 유리수

해설

② 충분조건일 때 의 반례는 $x > 0$ 이고, $y < 0$ 인 경우이다.

16. a, b, c 가 실수일 때, p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = b = 0$

② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b, q : ac = bc$

④ $p : a - 1 = 0, q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0, q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이라면 $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ 가 모두 참이어야 한다.

① $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$

② $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = 1, b = 3$)

③ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = 1, b = 2, c = 0$)

④ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = -1$)

⑤ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ (반례 : $a = 0, b = 0$)

17. a, b, x, y 가 실수이고 $a^2 + b^2 = 2, x^2 + y^2 = 8$ 일 때, $ax + by$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ -5

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$\text{즉, } (ax + by)^2 \leq 2 \times 8$$

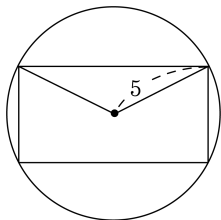
한편, $ax + by = X$ 라 하면, $X^2 \leq 16$

$$\therefore -4 \leq X \leq 4$$

따라서, $M = 4, m = -4$

$$\therefore M + m = 0$$

18. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$

해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
 가로 길이를 a , 세로 길이를 b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 100$$

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

직사각형 둘레의 길이의 최댓값은

$$2(a + b) = 20\sqrt{2}$$

19. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x + 1$ 로 정의될 때, 함수 f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9 \text{ 이므로}$$

함수 f 의 치역은 $\{3, 5, 7, 9\}$

따라서, 치역의 모든 원소의 합은 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

20. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 $1, \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.

$$\begin{aligned} & \text{따라서 } \{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 \end{aligned}$$

21. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2 (\because a$ 는 자연수)

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

22. 다음 보기의 함수 중에서 일대일 대응인 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = -x^2 + 1$

㉡ $g(x) = -x + 1$

㉢ $h(x) = x^3$

㉣ $i(x) = 2$

㉤ $j(x) = |2x - 1| \quad (x \geq 1)$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

일대일 대응이란 정의역이 x 에 치역 y 가
하나씩 대응 될 때를 말한다.

㉠, ㉣ 일대일 대응이 아니다.

㉡ 함수가 아니다.

따라서 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢, ㉤ 3개이다.

23. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중에서 일대일 대응의 개수를 m , 상수함수의 개수를 n 이라 할 때, $m - n$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

일대일 대응의 개수는 a, b, c 를 나열하는

방법의 수와 같으므로 $m = 6$

상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지

$$\therefore m = 3$$

$$\text{따라서 } m - n = 6 - 3 = 3$$

24. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3, f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1, f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0, f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1, f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3, f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

25. $f \circ f$ 를 f^2 , $f \circ f \circ f$ 를 f^3 과 같이 나타낼 때, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 이면 $f^3(2)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1}$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x$$

$$\begin{aligned}\therefore f^3(x) &= (f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) \\ &= f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

$$\therefore f^3(2) = 2$$