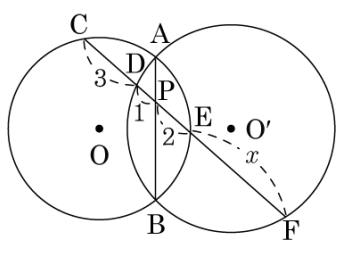
1. 다음 그림에서 $\overleftrightarrow{PT}$ 는 원의 접선이다. 이때, $\angle TPB$ 의 크기는?

① $66°$ ② $67°$ ③ $68°$ ④ $69°$ ⑤ $70°$

해설

$\angle TPB = \angle PAB = \angle BCD = 70°$

2. 다음 그림에서 $\overline{CD}=3$, $\overline{DP}=1$, $\overline{PE}=2$ 일 때, $\overline{EF}$ 의 길이는?

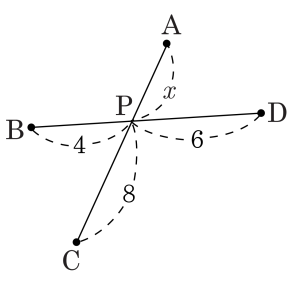


① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\overline{AB}$ 가 두 원의 공통현이므로
원 O 에서 $\overline{AP}\cdot\overline{BP}=\overline{CP}\cdot\overline{PE}$
원 O′ 에서 $\overline{AP}\cdot\overline{BP}=\overline{DP}\cdot\overline{PF}$
$\therefore\ \overline{CP}\cdot\overline{PE}=\overline{DP}\cdot\overline{PF}$
$(3+1)\times 2=1\times(2+x)$
$\therefore\ x=6$

3. 다음 그림에서 네 점 A, B, C, D 가 한 원 위에 있을 때, $\overline{PA}$ 의 길이는?



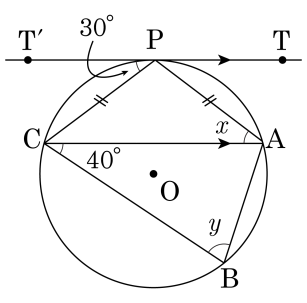
① 2　② 3

③ 4　④ 5

해설

$4 \times 6 = x \times 8$, $\therefore x = 3$,

4. 다음 그림에서 직선 TT′ 이 원 O의 접선일 때, $\angle x + \angle y$ 의 크기는?



① $50°$ ② $60°$ ③ $70°$

④ $80°$ ⑤ $90°$

해설

$\angle x = 30°$

$\angle ACP = 30°$ ($\because$ $\overleftrightarrow{TT'} // \overline{AC}$)

$\triangle ACP$는 이등변삼각형이므로

$\angle APC = 180° - 30° - 30° = 120°$

$\square ABCP$는 내접사각형이므로

$\angle APC + \angle ABC = 180°$

$\angle y = 180° - \angle APC = 60°$

$\therefore\ \angle x + \angle y = 90°$

5. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 의 길이는 $a\sqrt{b}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

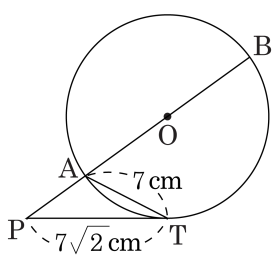
$4 \times 3 = 6 \times \overline{CK}$

$\overline{CK} = 2$

$\overline{PT}^2 = 4 \times 12$

$\therefore \overline{PT} = 4\sqrt{3}$

6. 다음 그림과 같이 원의 외부에 있는 한 점 P 에서 원 O 에 접선 PT 와 할선 PB 를 그었다. $\angle APT = \angle ATP$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이는?



① 3cm ② 3.5cm ③ 5cm

④ 6cm ⑤ 7cm

해설

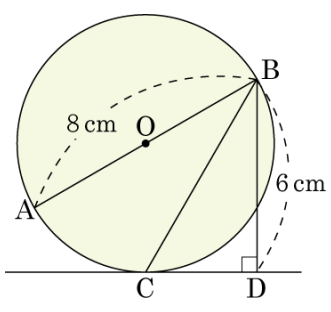
$\left(7\sqrt{2}\right)^2 = 7\,(7+2r)$

$14 = 7 + 2r$

$\therefore r = \dfrac{7}{2}\,(\text{cm})$

(지름) $= 7(\text{cm})$

7. 다음 그림에서 $\overleftrightarrow{CD}$ 는 원 O 의 접선이다. $\overline{AB}$ 가 원의 지름이고 $\overline{CD} \perp \overline{BD}$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이는?

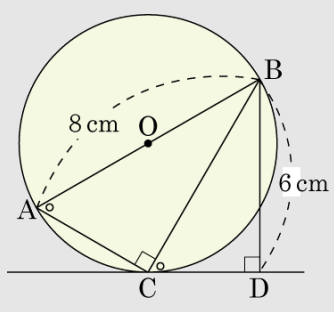


① 2cm ② 4cm

③ $2\sqrt{3}$cm ④ $3\sqrt{2}$cm

⑤ $4\sqrt{2}$cm

해설



$\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \angle BCD$ 이므로

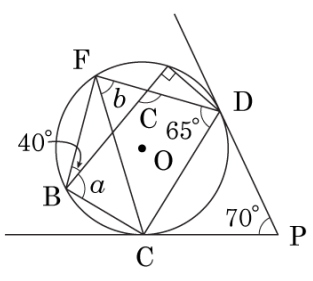
$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ (AA 닮음)

$\therefore\ 8 : \overline{BC} = \overline{BC} : 6$

$\overline{BC}^2 = 48$, $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$ cm

$\therefore\ \overline{AC} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ cm

8. 다음 그림에서 두 반직선은 원 O의 접선이다. $\angle BAD = 90°, \angle EDC = 65°, \angle EBF = 40°, \angle CPD = 70°$ 일 때, $\angle a + \angle b + \angle c$ 의 크기는?



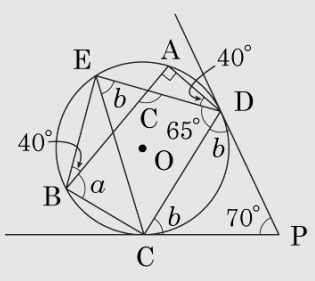
① 240° ② 245° ③ 255° ④ 260° ⑤ 320°

해설

1) 사각형 EBCD 가 원에 내접하므로 $\angle a + 40° + 65° = 180°$ ∴ $\angle a = 75°$

2) 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 내부의 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle b = \angle PDC = \angle PCD = 55°$ ($\because \overline{PD} = \overline{PC}$)



3) $\triangle ADE$ 에서 $\angle c = 90° + 40° = 130°$ (이 때, $\widehat{AF}$ 에 대한 원주각으로 $\angle FBA = \angle ADF = 40°$)

따라서, $\angle a + \angle b + \angle c = 75° + 55° + 130° = 260°$ 이다.

9. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PT}}$ 가 세 점 A, B, T 를 지나는 원의 접선이 되도록 하는 x 의 값은?

① $2\sqrt{15}$ ② $3\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

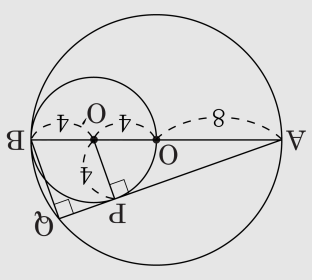
$x^2 = 6 \times 10 \quad \therefore x = 2\sqrt{15}$

10. 다음 그림과 같이 점 A 에서 원 O′ 에 그은 접선 AP 와 원 O 와의 교점을 Q 라 할 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?

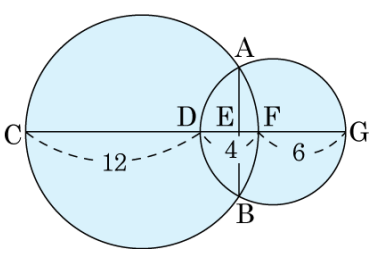
① $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ ② $\frac{17}{3}\sqrt{2}$
③ $\frac{25}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{32}{3}\sqrt{2}$
⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{2}$

해설

$\overline{AP} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$
$\triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$ 에서
$12 : 16 = 8\sqrt{2} : \overline{AQ}$
$12\overline{AQ} = 128\sqrt{2}$
$\therefore \overline{AQ} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$



11. 다음 그림과 같이 두 원이 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{CD}=12$, $\overline{DF}=4$, $\overline{FG}=6$ 일 때, $\overline{AE}\cdot\overline{BE}$ 의 값은?



① $\frac{172}{3}$ ② $\frac{173}{3}$
③ $\frac{164}{9}$ ④ $\frac{167}{9}$
⑤ $\frac{176}{9}$

해설

$\overline{DE}=x$ 라 하면

$\overline{CE}\times\overline{FE}=\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{DE}\times\overline{GE}$

$(12+x)(4-x)=x\times(6+4-x)$

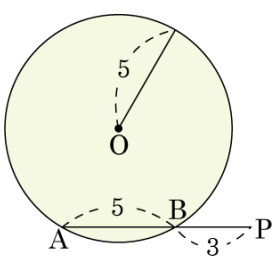
$x=\frac{8}{3}$

$\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{DE}\times\overline{GE}=\frac{8}{3}\times\left(4+6-\frac{8}{3}\right)=\frac{176}{9}$

12. 다음 그림에서 원의 중심이 P이고, 원 O가 내접하는 원의 반지름의 길이는?

① 11 ② 11.5 ③ 12

④ 12.5 ⑤ 13



해설

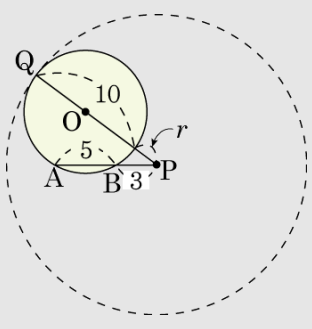
$\overline{PB} \times \overline{PA} = r \times \overline{PQ}$

$3 \times 8 = r(r+10)$

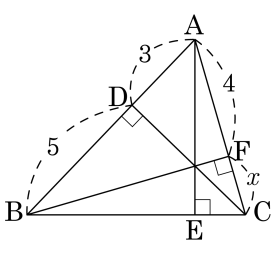
$r^2 + 10r - 24 = 0$ $\therefore$ $r =$ 2 ($\because$ $r > 0$)

원의 반지름 : $R = r + 10$

$\therefore$ $R = 12$



13. 다음 그림에서 네 점 B, C, D, F 는 한 원 위에 있을 때, $\overline{BC}$ 의 길이는?



① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{11}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

해설

$\overline{AF} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{AB} =$ 이므로

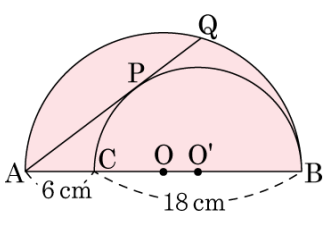
$4(4+x) = 3 \cdot 8$

$\therefore\ x = 2$

$\triangle ABF$ 에서 $\overline{BF} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

$\triangle BFC$ 에서 $\overline{BC} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}$

14. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 는 각각 반원 O와 O′의 지름이다. $\overline{AP}$ 가 반원 O′의 접선이고 $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 18\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?

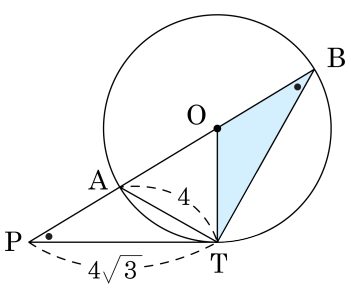


① $\frac{92}{5}\,\text{cm}$ ② $\frac{94}{5}\,\text{cm}$
③ $\frac{96}{5}\,\text{cm}$ ④ $\frac{98}{5}\,\text{cm}$
⑤ $20\,\text{cm}$

해설

$\overline{AP}^2 = \overline{AC} \times \overline{AB} = 6 \times 24 = 144$
$\therefore\ \overline{AP} = 12\,\text{cm}$
$\triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$ ($\because$ AA 닮음) 이므로
$\overline{AO'} : \overline{AB} = \overline{AP} : \overline{AQ}$
$15 : 24 = 12 : \overline{AQ}$
$\therefore\ \overline{AQ} = \frac{96}{5}\ (\text{cm})$

15. 그림과 같이 원 O′ 의 외부에 있는 한 점 P 에서 원 O 에 그은 접선과 중심 O 를 지나는 할선이 이 원과 만나는 세 점을 각각 T, A, B 라고 한다. $\overline{PT} = 4\sqrt{3}$, $\overline{AT} = 4$ 이고, $\angle ABT = \angle APT$ 일 때, $\triangle BOT$ 의 넓이를 구하면?



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\angle ABT = \angle APT$, $\angle ABT = \angle ATP$
삼각형의 외각의 성질에 따라 $\angle BAT = \angle APT + \angle ATP$ 이고 $\angle ATB = 90°$ 이므로
$\angle BAT = 60°$, $\angle ABT = 30°$, 따라서 삼각형의 외각의 성질에 따라 $\angle AOT = 60°$
따라서 $\triangle OAT$ 는 정삼각형이므로
$\overline{AT} = \overline{AO} = \overline{OB} = 4$
원의 중심을 지나는 할선과 접선 사이의 관계에 따라
$(4\sqrt{3})^2 = \overline{PA} \times (\overline{PA} + 8)$
$\therefore \overline{PA} = 4$ $(\because \overline{PA} > 0)$
점 B 에서 $\overline{PT}$ 의 연장선상에 수선을 내리고 그 수선의 발을 점 H 라고 하면
$\triangle PTO \backsim \triangle PHB$ (AA 닮음) 이므로
$\overline{PO} : \overline{PB} = \overline{PT} : \overline{PH} = \overline{OT} : \overline{BH}$
$8 : 12 = 4\sqrt{3} : \overline{PH} = 4 : \overline{BH}$
$\overline{PH} = 6\sqrt{3}$, $\overline{BH} = 6$
따라서 $\triangle BOT$ 의 넓이는
$\triangle PBH - \triangle POT - \triangle BHT = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = 4\sqrt{3}$ 이다.