1. $x^2+y^2+2xy-x-y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$
② $(x+y)(x-y-1)$
③ $(x-y)(x-y-1)$
④ $(x+y)(x+y-1)$
⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$x^2+y^2+2xy-x-y$
$=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)$

2. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x+3)^2 + 4$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

3. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$이다.

② $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

4. $f(x) = 2x - 3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \Leftrightarrow (g \circ f)(2x) = x$
$\Leftrightarrow g(f(2x)) = x$
$f(2x) = 2 \bullet 2x - 3 = 4x - 3$
$\therefore g(f(2x)) = g(4x - 3) = x$
$4x - 3 = 1$ 에서 $x = 1$ 이므로
$g(4x - 3) = x$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $g(1) = 1$

5. 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2,\ 3)$ 을 지날 때, 상수 $a,\ b$ 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x-1}$ 라 하면 $f(2) = 3,\ f^{-1}(2) = 3$

$f(2) = 2a + b = 3 \cdots$ ㉠

$f^{-1}(2) = 3$ 에서 $f(3) = 2$ 이므로

$f(3) = \dfrac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a + b = 4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$a = 1,\ b = 1 \quad \therefore ab = 1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} -x+3 > x-5 \\ 2x-1 \geq a \end{cases}$ 의 해가 $-3 \leq x < 4$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

① -8 ② -7 ③ -5 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-x+3 > x-5$, $x < 4$

$2x-1 \geq a$, $x \geq \dfrac{a+1}{2}$

연립부등식의 해가 $-3 \leq x < 4$이므로

$\dfrac{a+1}{2} = -3$, $a+1 = -6$

$\therefore\ a = -7$

7. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m \geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a \leq m \leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m \geq 0$이
항상 성립하려면 판별시 $D \leq 0$

$\frac{D}{4}=m^2+m \leq 0$

$m(m+1) \leq 0$, $-1 \leq m \leq 0$

$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

8. 부등식 $x^2 - 2ax + a + 2 < 0$의 해가 존재하지 않기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $-2 \le a \le 1$　　② $a \le -1$ 또는 $a \ge 2$

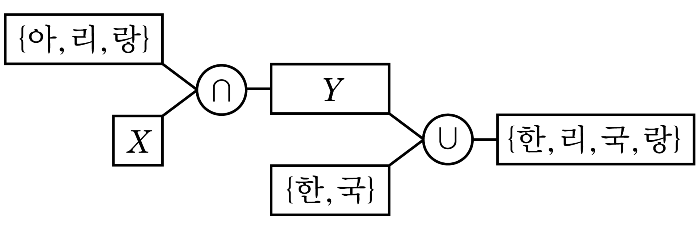
③ $-1 \le a \le 2$　　④ $-1 < a < 2$

⑤ $a < -1$ 또는 $a > 2$

해설

$x^2 - 2ax + a + 2 < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x 에 대하여
$x^2 - 2ax + a + 2 \ge 0$ 이어야 한다.
이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 의 판별식을
D 라 하면 $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 \le 0$ 에서
$(a+1)(a-2) \le 0$
$\therefore -1 \le a \le 2$

9. 두 집합 X, Y의 교집합과 합집합을 다음 그림과 같이 나타내기로 한다. 이때, 만족하는 집합 Y를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : {리, 랑}

해설

$Y \cup \{한, 국\} = \{한, 리, 국, 랑\}$ 이므로 $\{리, 랑\} \subset Y \subset \{한, 리, 국, 랑\}$ 이다.
또, $\{아, 리, 랑\} \cap X = Y$ 이므로 $Y \subset \{아, 리, 랑\}$ 이다.
따라서 $Y = \{리, 랑\}$ 이다.

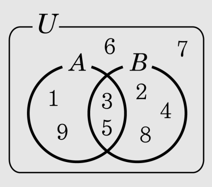
10. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 모두 만족할 때, 다음 중 집합 A 의 부분집합인 것을 모두 고르면?(정답 2개)

ㄱ. $A \cap B = \{3, 5\}$
ㄴ. $A - B = \{1, 9\}$
ㄷ. $(A \cup B)^c = \{6, 7\}$

① $\{1, 3\}$　② $\{1, 3, 5\}$　③ $\{1, 3, 5, 7\}$
④ $\{1, 3, 5, 6\}$　⑤ $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이다.
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A = \{1, 3, 5, 9\}$ 이다.
따라서 A 의 부분집합인 것은 ①, ②이다.



11. 540 의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)$
$=7\times 40\times 6=1680$

12. 다음 등식을 만족시키는 n의 값을 구하여라.

$${}_{10}C_{n+2} = {}_{10}C_{2n+2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

${}_{10}C_{n+2} = {}_{10}C_{2n+2}$ 에서
$n+2 = 2n+2$ 일 때 : $n = 0$
$n+2 = 10-(2n+2)$ 일 때 : $3n = 6$, $n = 2$
$\therefore n = 0$ *or* 2

13. 팔각형의 대각선의 개수를 구하여라.

① 16 ② 20 ③ 22 ④ 28 ⑤ 32

해설

점 8개 중 2개를 골라 직선을 만들고 그 중에서
팔각형의 변이 되는 경우를 제한다.
${}_8C_2 - 8 = 20$

14. 원에 내접하는 칠각형에 대하여 대각선은 모두 몇 개를 그을 수 있는가?

① 7 ② 12 ③ 14 ④ 35 ⑤ 38

해설

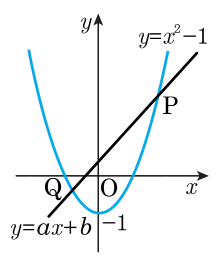
7 개의 점에서 2 개를 택하는 조합

$\therefore\ {}_7\mathrm{C}_2 = \dfrac{7!}{5!2!} = 21$

이 때, 7 각형의 변의 개수는 빼줘야 하므로

$\therefore\ 21 - 7 = 14$ 개

15. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 1 = a\left(1 + \sqrt{2}\right) + b$

$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2 = a + b$, $2 = a$

$\therefore a = 2$, $b = 0$

16. 원 밖의 한 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=4$ 에 그은 두 접선의 기울기를 $p,\ q$ 라 할 때, $p-q$ 의 값은? (단, $p>q$)

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{6}}{5}$　③ $\frac{3\sqrt{6}}{5}$　④ $\frac{4\sqrt{6}}{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 $(3,\ -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을
$y+1=m(x-3)$ 즉, $mx-y-3m-1=0$ 이라고 하면
원의 중심 $(0,0)$ 에서 접선까지의 거리는 원의 반지름 2와 같아야 한다. 따라서
$2=\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$, $|-3m-1|=2\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱을 하여 정리를 하면,
$5m^2+6m-3=0$ 이다.
이때, 두 기울기 p, q 은 이차방정식의 두근이므로
근과 계수와의 관계에 의하여
두근의 합 $p+q=-\frac{6}{5}$, 두근의 곱 $pq=-\frac{3}{5}$
따라서 $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=\frac{36}{25}+\frac{12}{5}=\frac{96}{25}$
따라서 $p-q=\frac{4\sqrt{6}}{5}$

17. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \ge 0$ 이면 $x \ge 0$ 또는 $y \ge 0$

② $x+y \ge 0$ 이면 $x \ge 0$ 이고 $y \ge 0$

③ $x \ge y$ 이면 $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$

④ $x \le 2$ 이면 $|x-1| \le |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy = 2 \ge 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \ge 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $3>0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \ge -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \le |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \le x^2-6x+9$ 에서 $x \le 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$'은 거짓이다.

18. 다음은 'x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.' 를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다) 에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

> 주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가) 이면 xy 도 (가) 이다.' 이다.
> $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
> $xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나) 가 된다.
> 따라서, 대우가 (다) 이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① 짝수, 홀수, 참
② 짝수, 짝수, 참
③ 짝수, 짝수, 거짓
④ 홀수, 홀수, 참
⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.' 이다.
$x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
$xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

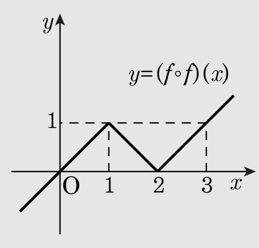
19. $0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x) = |x-1|$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax + b$의 실근의 개수는
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프와
직선 $y = ax + b$의 교점의 개수와 같다.
$f(x) = |x - 1|$에서
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x - 1| - 1|$
따라서 $0 \le x \le 2$에서
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x + 2$이어야 한다.



그런데, $b \neq 0$이므로 $y = -x + 2$
따라서 $a = -1$, $b = 2$이므로 $ab = -2$

20. 서로 다른 7 개의 과일이 있다. 이 중 빨간 색이 3 개, 노란 색이 2 개, 검은 색이 2 개다. 이 중에서 4 개의 과일을 택할 때, 빨간 색과 노란 색의 과일이 적어도 각각 한 개씩 포함되는 경우의 수는?

① 25　　② 27　　③ 29　　④ 31　　⑤ 33

해설

7 개의 과일 중에서 4 개의 과일을 선택하는
경우의 수는 ${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$ (가지)
이 중에서 빨간 색 과일이 한 개도 없는 경우의
수는 ${}_4C_4 = 1$ (가지)
노란 색 과일이 한 개도 없는 경우의 수는
${}_5C_4 = 5$ (가지)
빨간 색과 노란 색 과일이 한 개도 없는 경우의
수는 0 (가지)
따라서 구하는 경우의 수는 $35 - (1 + 5) = 29$ (가지)

21. 임의의 실수 x, y에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

22. 사차방정식 $x^4 - ax^2 + (a+1) = 0$이 서로 다른 두 개의 실근과 두 개의 허근을 갖기 위한 실수 a의 범위는?

① $a < -1$

② $a > 1$

③ $-1 < a < 2(1-\sqrt{2})$

④ $1 < a < 2(1+\sqrt{2})$

⑤ $2(1-\sqrt{2}) < a < 2(1+\sqrt{2})$

해설

$X = x^2$ 으로 놓으면,
$X^2 - aX + (a+1) = 0 \cdots\cdots$ ㉠
주어진 사차방정식이 두 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 방정식 ㉠이 양근 하나 음근 하나를 가져야 한다.
$\therefore$(두 근의 곱) $= a + 1 < 0$
$\therefore\ a < -1$

23. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1,\ (x-2)^2+(y-5)^2=1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

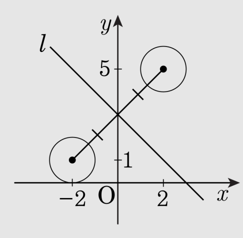
① $y=-2x+3$　　② $y=-x+2$　　③ $y=x+3$

④ $y=-x+3$　　⑤ $y=2x-1$

해설

두 원의 중심 $(-2,\ 1), (2,\ 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.

따라서 직선l 의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하면



ⅰ) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$ 이므로

$a=-1$

ⅱ) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right)$ 에서 $(0,3)$ 이므로 $b=3$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+3$ 이다.

24. 집합 $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_N\}$ 에 대하여 $f(P) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_N$ 이라 정의한다.
집합 $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}$ 이라 할 때, $f(A_1) + f(A_2) + (A_3) + \cdots + f(A_{16})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{16}$ 이라 두면,
집합 A 의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1} = 8$ (번) 씩 나온다.
따라서 $f(A_1)+f(A_2)+(A_3)+\cdots+f(A_{16}) = 8\times(3+6+9+12) = 240$

25. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $A \subset B \subset X$를 만족하는 두 집합 $A,\ B$의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

① 8 개　② 16 개　③ 24 개　④ 27 개　⑤ 32 개

해설

$A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 $A,\ B$ 를 집합 B 의 원소의 개수에 따라 분류해 보면

i) $n(B) = 0$ 일 때, $B = \varnothing$ 이면 $A = \varnothing$ 이므로 1 가지이다.
ii) $n(B) = 1$ 일 때, $B = \{1\},\ \{2\},\ \{3\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 2 가지씩이므로 6 가지이다.
iii) $n(B) = 2$ 일 때, $B = \{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{3,\ 1\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 4 가지씩이므로 12 가지이다.
iv) $n(B) = 3$ 일 때, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 A 는 8 가지이다.
따라서 두 집합 $A,\ B$ 의 순서쌍 $(A,\ B)$ 의 개수는 $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ (개) 이다.