

1. $x^2 + y^2 + 2xy - x - y$ 을 인수분해 하면?

① $(x - y)(x + y + 1)$

② $(x + y)(x - y - 1)$

③ $(x - y)(x - y - 1)$

④ $(x + y)(x + y - 1)$

⑤ $(x + y)(x + y + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2xy - x - y \\ &= (x + y)^2 - (x + y) = (x + y)(x + y - 1) \end{aligned}$$

2. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$y = -2(x + 3)^2 + 4$$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

3. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

- ① $n(X) = n(Y)$ 이다.
- ② $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
- ③ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.
- ④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.
- ⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

- ⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

4. $f(x) = 2x - 3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \Leftrightarrow (g \circ f)(2x) = x$$

$$\Leftrightarrow g(f(2x)) = x$$

$$f(2x) = 2 \bullet 2x - 3 = 4x - 3$$

$$\therefore g(f(2x)) = g(4x - 3) = x$$

$$4x - 3 = 1 \text{ 에서 } x = 1 \text{ 이므로}$$

$$g(4x - 3) = x \text{ 의 양변에 } x = 1 \text{ 을 대입하면 } g(1) = 1$$

5. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

6. 연립부등식 $\begin{cases} -x + 3 > x - 5 \\ 2x - 1 \geq a \end{cases}$ 의 해가 $-3 \leq x < 4$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

① -8

② -7

③ -5

④ 3

⑤ 4

해설

$$-x + 3 > x - 5, x < 4$$

$$2x - 1 \geq a, x \geq \frac{a+1}{2}$$

연립부등식의 해가 $-3 \leq x < 4$ 이므로

$$\frac{a+1}{2} = -3, a+1 = -6$$

$$\therefore a = -7$$

7. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2mx - m \geq 0$ 을 만족하는 실수 m 의 범위는 $a \leq m \leq b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$$x^2 - 2mx - m \geq 0 \text{ 이}$$

항상 성립하려면 판별식 $D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = m^2 + m \leq 0$$

$$m(m+1) \leq 0, -1 \leq m \leq 0$$

$$\therefore a + b = (-1) + 0 = -1$$

8. 부등식 $x^2 - 2ax + a + 2 < 0$ 의 해가 존재하지 않기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $-2 \leq a \leq 1$

② $a \leq -1$ 또는 $a \geq 2$

③ $-1 \leq a \leq 2$

④ $-1 < a < 2$

⑤ $a < -1$ 또는 $a > 2$

해설

$x^2 - 2ax + a + 2 < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x 에 대하여

$x^2 - 2ax + a + 2 \geq 0$ 이어야 한다.

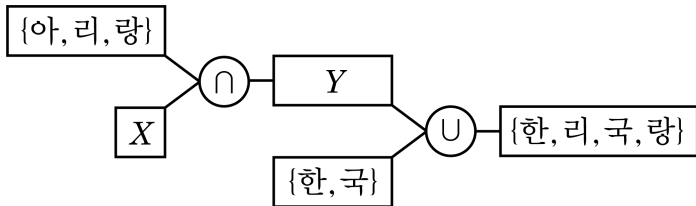
이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 의 판별식을

D 라 하면 $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 \leq 0$ 에서

$$(a+1)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 2$$

9. 두 집합 X, Y 의 교집합과 합집합을 다음 그림과 같이 나타내기로 한다. 이때, 만족하는 집합 Y 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\{\text{리, 랑}\}$

해설

$Y \cup \{\text{한, 국}\} = \{\text{한, 리, 국, 랑}\}$ 이므로 $\{\text{리, 랑}\} \subset Y \subset \{\text{한, 리, 국, 랑}\}$ 이다.

또, $\{\text{아, 리, 랑}\} \cap X = Y$ 이므로 $Y \subset \{\text{아, 리, 랑}\}$ 이다.
따라서 $Y = \{\text{리, 랑}\}$ 이다.

10. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 모두 만족할 때, 다음 중 집합 A 의 부분집합인 것을 모두 고르면?(정답 2개)

$$\neg. A \cap B = \{3, 5\}$$

$$\neg. A - B = \{1, 9\}$$

$$\supset. (A \cup B)^c = \{6, 7\}$$

① $\{1, 3\}$

② $\{1, 3, 5\}$

③ $\{1, 3, 5, 7\}$

④ $\{1, 3, 5, 6\}$

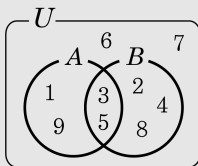
⑤ $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이다.

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A = \{1, 3, 5, 9\}$ 이다.

따라서 A 의 부분집인 것은 ①, ②이다.



11. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5) \\ &= 7 \times 40 \times 6 = 1680 \end{aligned}$$

12. 다음 등식을 만족시키는 n 의 값을 구하여라.

$${}_{10}C_{n+2} = {}_{10}C_{2n+2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

${}_{10}C_{n+2} = {}_{10}C_{2n+2}$ 에서

$n+2 = 2n+2$ 일 때 : $n = 0$

$n+2 = 10 - (2n+2)$ 일 때 : $3n = 6, n = 2$

$\therefore n = 0 \text{ or } 2$

13. 팔각형의 대각선의 개수를 구하여라.

① 16

② 20

③ 22

④ 28

⑤ 32

해설

점 8개 중 2개를 골라 직선을 만들고 그 중에서 팔각형의 변이 되는 경우를 제한다.

$${}_8C_2 - 8 = 20$$

14. 원에 내접하는 칠각형에 대하여 대각선은 모두 몇 개를 그을 수 있는가?

① 7

② 12

③ 14

④ 35

⑤ 38

해설

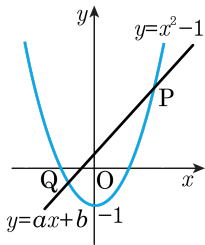
7 개의 점에서 2 개를 택하는 조합

$$\therefore {}_7C_2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

이 때, 7 각형의 변의 개수는 빼줘야 하므로

$$\therefore 21 - 7 = 14 \text{ 개}$$

15. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$$(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = a(1 + \sqrt{2}) + b$$

$$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = a + b, \quad 2 = a$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 0$$

16. 원 밖의 한 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 두 접선의 기울기를 p, q 라 할 때, $p - q$ 의 값은? (단, $p > q$)

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

③ $\frac{3\sqrt{6}}{5}$

④ $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을

$y + 1 = m(x - 3)$ 즉, $mx - y - 3m - 1 = 0$ 이라고 하면

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 접선까지의 거리는 원의 반지름 2와 같아야 한다. 따라서

$$2 = \frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad |-3m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱을 하여 정리를 하면,

$$5m^2 + 6m - 3 = 0 \text{ 이다.}$$

이때, 두 기울기 p, q 은 이차방정식의 두근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\text{두근의 합 } p + q = -\frac{6}{5}, \quad \text{두근의 곱 } pq = -\frac{3}{5}$$

$$\text{따라서 } (p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq = \frac{36}{25} + \frac{12}{5} = \frac{96}{25}$$

$$\text{따라서 } p - q = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

17. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.

② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.

③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.

④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그
역이 모두 참이다.

⑤ 명제 ' $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ' 은 참이지만, 그의
역 ' $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ' 은 거짓이다.

18. 다음은 ‘ x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.’를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가)이면 xy 도 (가)이다.’이다.

$x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면

$xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나)가 된다.

따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① 짝수, 홀수, 참

② 짝수, 짝수, 참

③ 짝수, 짝수, 거짓

④ 홀수, 홀수, 참

⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.’이다.

$x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면

$xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.

따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

19. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$ 의 실근의 개수는
 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와

직선 $y = ax+b$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = |x-1|$ 에서

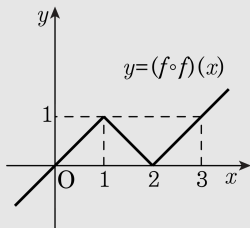
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x+2$ 이어야 한다.

그런데, $b \neq 0$ 이므로 $y = -x+2$

따라서 $a = -1$, $b = 2$ 이므로 $ab = -2$



20. 서로 다른 7 개의 과일이 있다. 이 중 빨간 색이 3 개, 노란 색이 2 개, 검은 색이 2 개다. 이 중에서 4 개의 과일을 택할 때, 빨간 색과 노란 색의 과일이 적어도 각각 한 개씩 포함되는 경우의 수는?

① 25

② 27

③ 29

④ 31

⑤ 33

해설

7 개의 과일 중에서 4 개의 과일을 선택하는

경우의 수는 ${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$ (가지)

이 중에서 빨간 색 과일이 한 개도 없는 경우의

수는 ${}_4C_4 = 1$ (가지)

노란 색 과일이 한 개도 없는 경우의 수는

${}_5C_4 = 5$ (가지)

빨간 색과 노란 색 과일이 한 개도 없는 경우의

수는 0 (가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $35 - (1 + 5) = 29$ (가지)

21. 임의의 실수 x, y 에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y - 1) + x_2(y - 1)^2 + x_3(y - 1)^3 + \cdots + x_{12}(y - 1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11}

② 2^{12}

③ 2^{13}

④ 3^{11}

⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

22. 사차방정식 $x^4 - ax^2 + (a+1) = 0$ 이 서로 다른 두 개의 실근과 두 개의 허근을 갖기 위한 실수 a 의 범위는?

- ① $a < -1$
② $a > 1$
③ $-1 < a < 2(1 - \sqrt{2})$
④ $1 < a < 2(1 + \sqrt{2})$
⑤ $2(1 - \sqrt{2}) < a < 2(1 + \sqrt{2})$

해설

$X = x^2$ 으로 놓으면,

$$X^2 - aX + (a+1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

주어진 사차방정식이 두 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 방정식 $\textcircled{7}$ 이 양근 하나 음근 하나를 가져야 한다.

$$\therefore (\text{두 근의 곱}) = a+1 < 0$$

$$\therefore a < -1$$

23. 두 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

① $y = -2x + 3$

② $y = -x + 2$

③ $y = x + 3$

④ $y = -x + 3$

⑤ $y = 2x - 1$

해설

두 원의 중심 $(-2, 1)$, $(2, 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.

따라서 직선 l 의 방정식을 $y = ax + b$ 라 하면

i) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

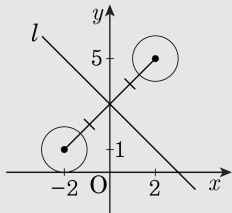
$$\frac{5-1}{2-(-2)} = 1 \text{ 이므로}$$

$$a = -1$$

ii) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{5+1}{2} \right) \text{ 에서 } (0, 3) \text{ 이므로 } b = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = -x + 3$ 이다.



24. 집합 $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}$ 에 대하여 $f(P) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_N$ 이라 정의한다.

집합 $A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 할 때, $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$A = \{3, 6, 9, 12\}$ 의 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 이라 두면, 집합 A 의 모든 부분집합에서 하나의 원소는 모두 $2^{4-1} = 8$ (번) 씩 나온다.

따라서 $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + \dots + f(A_{16}) = 8 \times (3 + 6 + 9 + 12) = 240$

25. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

① 8 개

② 16 개

③ 24 개

④ 27 개

⑤ 32 개

해설

$A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 A, B 를 집합 B 의 원소의 개수에 따라 분류해 보면

- i) $n(B) = 0$ 일 때, $B = \emptyset$ 이면 $A = \emptyset$ 이므로 1가지이다.
- ii) $n(B) = 1$ 일 때, $B = \{1\}, \{2\}, \{3\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 2가지씩이므로 6가지이다.
- iii) $n(B) = 2$ 일 때, $B = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 4가지씩이므로 12가지이다.
- iv) $n(B) = 3$ 일 때, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 A 는 8가지이다.
따라서 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ (개)이다.