

1. 수직선 위의 두 점 A(-2), B(4)에 대하여 P(-5)일 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여

$\overline{PA} + \overline{PB}$ 를 구한다.

A(-2), B(4), P(-5)에 대하여

$\overline{PA} = |-5 - (-2)| = 3$, $\overline{PB} = |-5 - 4| = 9$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = 3 + 9 = 12$

2. 세 점 A(1, 2), B(3, -2), C(-5, -1) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?
- ① 이등변 삼각형 ② 예각삼각형
- ③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형
- ⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{65}$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(1+5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ 에서}$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 \text{ 이므로 } \triangle ABC \text{ 는 } \angle A = 90^\circ \text{ 인 직각삼각형 이다.}$$

3. 두 점 A(2, 3), B(-1, -3) 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 외분하는 점 P 의 좌표는?

① P(4, 9)

② P(4, -9)

③ P(-4, -9)

④ P(-4, 9)

⑤ P(9, 4)

해설

P(a , b) 라 하면,

$$a = \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2}{1} = -4,$$

$$b = \frac{2 \cdot (-3) - 1 \cdot 3}{1} = -9$$

$$\therefore P(-4, -9)$$

4. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, 꼭짓점 B, C의 좌표를 구하면?

- ① B(-5, 2), C(5, 1) ② B(-6, 2), C(4, 0)
③ B(-7, 2), C(5, 0) ④ B(-7, -1), C(4, 0)
⑤ B(-7, -2), C(5, -1)

해설

B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)으로 놓으면

$$\frac{5+x_2}{2} = -1, \frac{4+y_2}{2} = 3,$$

$$\frac{5+x_2+x_3}{3} = 1, \frac{4+y_2+y_3}{3} = 2$$

$$\therefore x_2 = -7, y_2 = 2, x_3 = 5, y_3 = 0$$

$$\therefore \text{즉, B}(-7, 2), \text{C}(5, 0)$$

5. 네 점 $O(0,0)$, $A(-3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC의 넓이는 삼각형 BOC의 넓이의 몇 배인가?

- ① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 높이가 같으므로

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.

$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle AOC$ 의 넓이는 $\triangle BOC$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

6. 두 점 (2, 1), (3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 2 인 직선의 방정식은?

- ① $y = 3x - 6$ ② $y = 3x - 2$ ③ $y = 3x - 1$
④ $y = 3x + 6$ ⑤ $y = 3x + 2$

해설

두 점 (2, 1), (3, 4) 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-1}{3-2} = 3$ 이므로, 구하는 직선의 기울기는 3 이고, x 절편이 2 인 직선이므로,
 $y = 3(x - 2)$
 $\therefore y = 3x - 6$

7. 방정식 $x-3y+6=0$ 이 나타나는 직선의 기울기와 y 절편을 차례대로 구하면?

① $\frac{1}{3}, -2$

② $\frac{1}{3}, 2$

③ $-\frac{1}{3}, 2$

④ $3, -2$

⑤ $-3, 2$

해설

$x-3y+6=0$ 을 y 에 대하여 풀면

$$3y = x + 6, y = \frac{1}{3}x + 2$$

$\therefore$ 기울기 : $\frac{1}{3}$, y 절편 : 2

8. 다음은 두 직선 $x + y - 2 = 0, mx - y + m + 1 = 0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위를 정하는 과정이다. 위의 안에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

증명

$x + y - 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $mx - y + m + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 m 에 대하여 정리하면
 $(x + 1)m - (\textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉠}) = 0$ 에서 이 직선은 m 의 값에 관계없이 정점 $\textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉡}$ 을 지난다.
(i) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉢}$
(ii) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(2, 0)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉣}$
따라서, 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면 (i), (ii)에서 $\textcircled{\hspace{1cm}} \textcircled{㉤}$

- ① $y - 1$
- ② $(-1, 1)$
- ③ 1
- ④ $-\frac{1}{3}$
- ⑤ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$

해설

$x + y - 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $mx - y + m + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 m 에 대하여 정리하면
 $(x + 1)m - (\textcircled{y - 1}) = 0$ 에서 이 직선은 m 의 값에 관계없이 정점 $\textcircled{(-1, 1)}$ 을 지난다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면
(i) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} 1$
(ii) $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(2, 0)$ 를 지난다 때, $m = \textcircled{\hspace{1cm}} -\frac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $\textcircled{-\frac{1}{3} < m < 1}$

9. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$ 과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 의 해의 개수는?
- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개
④ 4개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x + y)(x - y) = 0$
 $\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$
 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x - 1)^2 - y^2 = 0$
 $(x + y - 1)(x - y - 1) = 0$
 $\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는
두 직선 $x + y = 0, x - y = 0$
 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 는 두 직선 $x + y - 1 = 0, x - y - 1 = 0$
위의 점이므로 다음 그림에서
교점의 개수는 2개

10. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

11. x 축 위의 점 P로부터 직선 $4x + 3y + 2 = 0$ 까지의 거리가 2인 점은 두 개 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P의 좌표를 $(\alpha, 0)$ 이라 하면

P에서 직선까지의 거리가 2이므로

$$\frac{|4 \cdot \alpha + 3 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

$$\therefore |4\alpha + 2| = 10$$

$$4\alpha + 2 = \pm 10$$

$$\therefore \alpha = 2, -3$$

$$\therefore \text{거리 } l \text{ 은 } l = 2 - (-3) = 5$$

12. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$$x^2 - x + 1 = x + k \text{ 에서 } \frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$$

$$\therefore k = 0$$

이때, $x = 1, y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1, 1)$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

13. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

(0,0), (2,6), (6,3)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

14. 복소수 $z = a + bi$ 를 좌표평면 위의 점 P(a, b)에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)
- ① 원 ② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\ &= (2a+3b) + (2b-3a)i \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

㉗이 실수이려면 $2b = 3a$

$$\therefore b = \frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

15. 세 점 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

- ① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

P(x, y)라 두면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

∴ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P는 △ABC의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

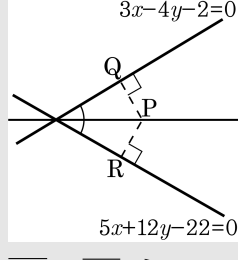
16. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

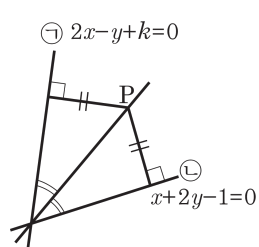
기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

17. 두 직선 $2x - y + k = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3, 1)$ 을 지날 때, 상수 k 의 값의 합을 구하면?

- ① -2 ② 4 ③ -6
 ④ 8 ⑤ -10



해설

$$2x - y + k = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

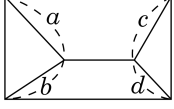
(점 P와 ㉠사이의 거리) = (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow |5 + k| = 4$$

$$\Rightarrow 5 + k = \pm 4 \Rightarrow k = -9 \text{ 또는 } k = -1$$

$\therefore k$ 의 합 : -10

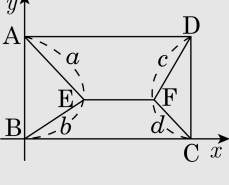
18. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



- ① $\sqrt{a} + \sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{d}$ ② $a + c = b + d$
 ③ $a + b = c + d$ ④ $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$
 ⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면
 $A(0, q), C(p, 0)$ 라 할 수 있고 $D(p, q)$ 이다.
 이때, $E(x, y), F(z, y)$ 라고 하면
 $a^2 = x^2 + (y - q)^2$
 $b^2 = x^2 + y^2$
 $c^2 = (z - p)^2 + (y - q)^2$
 $d^2 = (z - p)^2 + y^2$ 이므로
 $\therefore a^2 + d^2 = b^2 + c^2$



19. 세 점 A(6, 2) B(0, -6), C(7, -5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2} \right) = (3, -2)$$

$$\therefore 3ab = -18$$

20. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 의 좌표는?
- ① (-3, -7) ② (-2, -5) ③ (3, 5)
- ④ (2, 3) ⑤ (3, 2)

해설

직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점을 $P(a, b)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$
 $12a - 8b = 20$
 $\therefore 3a - 2b = 5 \dots\dots\dots ①$
또, 점 P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로
 $b = 2a - 1 \dots\dots\dots ②$
①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
A(-2, 1), B(4, -3)의 수직이등분선 위에 있다.
 $\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{1+3}{-2-4} = -\frac{2}{3}$ 이므로
수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$, A(-2, 1), B(4, -3)의 중점 (1, -1)
를 지나므로
 $\therefore y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \dots\dots ①$
구하는 점 P는 $y = 2x - 1$ 과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x = -3, y = -7$
 $\therefore P(-3, -7)$