1. 수직선 위의 두 점 $A(-2)$, $B(4)$에 대하여 $P(-5)$일 때, $\overline{PA}+\overline{PB}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여
$\overline{PA}+\overline{PB}$를 구한다.
$A(-2), B(4), P(-5)$ 에 대하여
$\overline{PA} = |-5-(-2)| = 3$, $\overline{PB} = |-5-4| = 9$
$\therefore \overline{PA}+\overline{PB} = 3+9 = 12$

2. 세 점 $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(-5,-1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 이등변 삼각형

② 예각삼각형

③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형

④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설

$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-5-3)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{65}$

$\overline{CA} = \sqrt{(1+5)^2+(2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 에서

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형이다.

3. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(-1,\ -3)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$ 로 외분하는 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}(4,\ 9)$　② $\mathrm{P}(4,\ -9)$　③ $\mathrm{P}(-4,\ -9)$

④ $\mathrm{P}(-4,\ 9)$　⑤ $\mathrm{P}(9,\ 4)$

해설

$\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 하면,

$$a = \frac{2\cdot(-1) - 1\cdot 2}{1} = -4,$$

$$b = \frac{2\cdot(-3) - 1\cdot 3}{1} = -9$$

$\therefore\ \mathrm{P}(-4,\ -9)$

4. $\triangle ABC$의 꼭짓점 A의 좌표가 $(5,4)$, 변 AB의 중점의 좌표가 $(-1,3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$일 때, 꼭짓점 B, C의 좌표를 구하면?

① $B(-5,2),\ C(5,1)$ ② $B(-6,2),\ C(4,0)$

③ $B(-7,2),\ C(5,0)$ ④ $B(-7,-1),\ C(4,0)$

⑤ $B(-7,-2),\ C(5,-1)$

해설

$B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$으로 놓으면

$$\frac{5+x_2}{2}=-1,\ \frac{4+y_2}{2}=3,$$

$$\frac{5+x_2+x_3}{3}=1,\ \frac{4+y_2+y_3}{3}=2$$

$$\therefore\ x_2=-7,\ y_2=2,\ x_3=5,\ y_3=0$$

즉, $B(-7,2),\ C(5,0)$

5. 네 점 $O(0,0), A(-3,0), B(4,0), C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC의 넓이는 삼각형 BOC의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle AOC$와 $\triangle BOC$의 높이가 같으므로

$\triangle AOC$와 $\triangle BOC$의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.

$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$이므로 $\triangle AOC$의 넓이는 $\triangle BOC$의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

6. 두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 2 인 직선의 방정식은?

① $y = 3x - 6$　② $y = 3x - 2$　③ $y = 3x - 1$

④ $y = 3x + 6$　⑤ $y = 3x + 2$

해설

두 점 $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{4-1}{3-2} = 3$ 이므로, 구하는 직선의 기울기는 3 이고, x 절편이 2 인 직선이므로,

$y = 3(x - 2)$

$\therefore\ \ y = 3x - 6$

7. 방정식 $x-3y+6=0$ 이 나타나는 직선의 기울기와 y 절편을 차례대로 구하면?

① $\frac{1}{3}$, -2　　② $\frac{1}{3}$, 2　　③ $-\frac{1}{3}$, 2

④ 3, -2　　⑤ -3, 2

해설

$x-3y+6=0$ 을 y 에 대하여 풀면

$3y=x+6$, $y=\frac{1}{3}x+2$

$\therefore$ 기울기 : $\frac{1}{3}$, y 절편 : 2

8. 다음은 두 직선 $x+y-2=0, mx-y+m+1=0$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위를 정하는 과정이다. 위의 안에 들어갈 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

증명

$x+y-2=0 \cdots\cdots ㉠$

$mx-y+m+1=0 \cdots\cdots ㉡$

㉡을 m에 대하여 정리하면

$(x+1)m-(\boxed{①})=0$에서 이 직선은 m의 값에 관계없이 정점 $\boxed{②}$을 지난다.

(i) ㉡이 점 $(0, 2)$를 지날 때, $m=\boxed{③}$

(ii) ㉡이 점 $(2, 0)$를 지날 때, $m=\boxed{④}$

따라서, 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면 (i), (ii)에서 $\boxed{⑤}$

① $y-1$ ② $(-1, 1)$ ③ 1

④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$

해설

$x+y-2=0 \cdots\cdots ㉠$

$mx-y+m+1=0 \cdots\cdots ㉡$

㉡을 m에 대하여 정리하면

$(x+1)m-(\boxed{y-1})=0$에서 이 직선은 m의 값에 관계없이 정점 $\boxed{(-1,\ 1)}$을 지난다.

따라서 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면

(i) ㉡이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때, $m=\boxed{1}$

(ii) ㉡이 점 $(2,\ 0)$를 지날 때, $m=\boxed{-\frac{1}{3}}$

(i), (ii)에서 $\boxed{-\frac{1}{3}<m<1}$

9. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$의 해의 개수는?

① 없다 ② 1 개 ③ 2 개

④ 4개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x + y)(x - y) = 0$

$\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x - 1)^2 - y^2 = 0$

$(x + y - 1)(x - y - 1) = 0$

$\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$

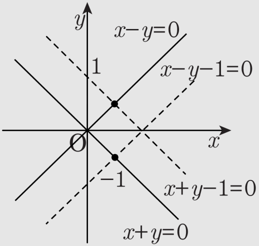
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는

두 직선 $x + y = 0$, $x - y = 0$

$x^2-y^2-2x+1 = 0$는 두 직선 $x+y-1 = 0$, $x - y = 0$

위의 점이므로 다음 그림에서

교점의 개수는 2개



10. 두 직선 $x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$이다. ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow \ (1,3),(2,-1)$을 지나는 직선

$$y=\frac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$$

$\Rightarrow \ y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore \ ab=-28$

11. x축 위의 점 P로부터 직선 $4x+3y+2=0$까지의 거리가 2인 점은 두 개 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

P에서 직선까지의 거리가 2이므로

$$\frac{|4\cdot\alpha+3\cdot0+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$\therefore |4\alpha+2|=10$

$4\alpha+2=\pm10$

$\therefore \alpha=2,\ \ -3$

$\therefore$ 거리 l은 $l=2-(-3)=5$

12. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

13. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$$(0,0),\ (2,6),\ (6,3)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

14. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z=(2-3i)(a+bi)$$
$$=(2a+3b)+(2b-3a)i\cdots㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$$\therefore\ b=\frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

15. 세 점 A(0,0), B(1,0), C(1,2)에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

$\therefore\ P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 △ABC의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

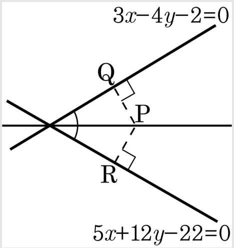
16. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

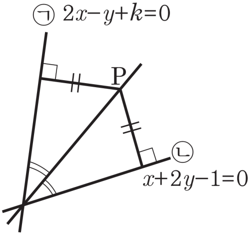
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ \ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

17. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2　　② 4　　③ -6

④ 8　　⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots ㉠$

$x+2y-1=0 \quad \cdots ㉡$

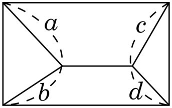
(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k| = 4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

18. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $\sqrt{a}+\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{d}$ ② $a+c=b+d$

③ $a+b=c+d$ ④ $a^2+d^2=b^2+c^2$

⑤ $a^2+b^2=c^2+d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면

A$(0,\ q)$, C$(p,\ 0)$ 라 할 수 있고 D$(p,\ q)$ 이다.

이때, E$(x,\ y)$, F$(z,\ y)$라고 하면

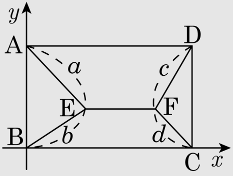
$a^2=x^2+(y-q)^2$

$b^2=x^2+y^2$

$c^2=(z-p)^2+(y-q)^2$

$d^2=(z-p)^2+y^2$ 이므로

$\therefore\ a^2+d^2=b^2+c^2$



19. 세 점 $A(6,2)$ $B(0,-6)$, $C(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3,-2)$$

$\therefore\ 3ab = -18$

20. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 2)$

해설

직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
$12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5\cdots\cdots$ ①
또, 점 P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1\cdots\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
$A(-2,1), B(4,-3)$의 수직이등분선 위에 있다.
$\overline{AB}$의 기울기는 $\dfrac{1+3}{-2-4}=-\dfrac{2}{3}$이므로
수직이등분선의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$, $A(-2,1), B(4,-3)$ 의 중점 $(1,-1)$를 지나므로
$\therefore\ y+1=\dfrac{3}{2}(x-1)\ \cdots$ ①
구하는 점 P는 $y=2x-1$과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x=-3, y=-7$
$\therefore\ P(-3,\ -7)$