

1. 방정식 $2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{3}{2}$
- ② -1
- ③ $-\frac{1}{2}$
- ④ $-\frac{1}{4}$
- ⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 에서
 $x^2 + 4xy + 4y^2 + x^2 + 2x + 1 = 0,$
 $(x + 2y)^2 + (x + 1)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로 $x + 2y = 0 \dots\dots ①, x + 1 = 0 \dots\dots ②$
①, ②에서 $x = -1, y = \frac{1}{2}$
 $\therefore x + y = -\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면 $2x^2 + 2(2y + 1)x + (4y^2 + 1) = 0 \dots\dots ①$
 x 가 실수이므로 $\frac{D}{4} = (2y + 1)^2 - 2(4y^2 + 1) \geq 0$
 $\therefore (2y - 1)^2 \leq 0$
그런데 $2y - 1$ 이 실수이므로 $2y - 1 = 0$
 $\therefore y = \frac{1}{2} \dots\dots ②$
②를 ①에 대입하면
 $2x^2 + 4x + 2 = 0, (x + 1)^2 = 0$
 $\therefore x = -1 \dots\dots ③$
②, ③에서 $x + y = -\frac{1}{2}$

2. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + (2y - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ &= (x - 2y + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ &\therefore x - 2y + 1 = 0, y - 2 = 0 \text{ 이므로} \\ &y = 2, x - 4 + 1 = 0 \quad \therefore x = 3 \\ &\text{따라서 } x + y = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

3. 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 10y + 13 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $x^2 + 2(y - 2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$
이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$$\frac{D}{4} = (y - 2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$$
$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0, \quad y^2 - 6y + 9 \leq 0$$
$$(y - 3)^2 \leq 0 \quad y \text{ 가 실수이므로 } y - 3 = 0$$
$$\therefore y = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$
$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } x^2 + 2x + 1 = 0, (x + 1)^2 = 0$$
$$\therefore x = -1$$
$$\therefore x + y = -1 + 3 = 2$$

4. x, y 가 정수일 때 방정식 $xy - x - 2y - 2 = 0$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 6 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$xy - x - 2y - 2 + 4 = 4$
 $x(y - 1) - 2(y - 1) = (x - 2)(y - 1) = 4$
따라서
 $x - 2 = 1, y - 1 = 4$ 일 때, $x = 3, y = 5$
 $x - 2 = 2, y - 1 = 2$ 일 때, $x = 4, y = 3$
 $x - 2 = 4, y - 1 = 1$ 일 때, $x = 6, y = 2$
 $x - 2 = -1, y - 1 = -4$ 일 때, $x = 1, y = -3$
 $x - 2 = 4, y - 1 = -1$ 일 때, $x = 6, y = 0$
 $x - 2 = 1, y - 1 = 4$ 일 때, $x = 3, y = 5$
따라서 순서쌍은 $(3, 5), (4, 3), (6, 2), (1, -3),$
 $(6, 0), (3, 5)$ 로 모두 6 개이다.

5. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

6. $N_1, N_2, N_3, \dots, N_8$ 은 모두 자연수이고, $N_1 < N_2 < \dots < N_8$,
 $N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_8 = 80$ 이라 할 때, N_8 의 최댓값은? (단,
 $N_1 = 4$)

① 29

② 30

③ 31

④ 32

⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_8$ 이므로 $N_2 = N_1 + 1$, $N_3 = N_2 + 1 =$
 $N_1 + 2$, $\dots$, $N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$ 일 때, N_8 은 최댓값이 된다.

$$\therefore N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \dots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$$

$$7N_1 + (1 + 2 + \dots + 6) + N_8 = 80$$

$$28 + 21 + N_8 = 80$$

$$\therefore N_8 = 80 - 49 = 31$$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (2a-1)x + a+1 = 0$ 의 두 근 α, β 가 모두 정수일 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값을 구하면? (단, a 는 자연수)

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

근이 정수이려면 판별식 $D = (2a-1)^2 - 4(a+1) = k^2$ (k 는 정수) 이어야 한다. 이 식을 정리하면 $4a^2 - 8a - 3 = k^2$, $(2a-2)^2 - 7 = k^2$, $(2a-2)^2 - k^2 = 7$, $(2a-2+k)(2a-2-k) = 7$ a, k 는 정수이므로
(i) $2a-2+k = 1$, $2a-2-k = 7$ 에서
 $a = 3$, $k = -3$
(ii) $2a-2+k = 7$, $2a-2-k = 1$ 에서
 $a = 3$, $k = 3$
(iii) $2a-2+k = -1$, $2a-2-k = -7$ 에서 $a = -1$, $k = 3$
(iv) $2a-2+k = -7$, $2a-2-k = -1$ 에서 $a = -1$, $k = -3$
그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2a-1}{a+1} = \frac{5}{4}$$

8. 어느 가게에서 물건을 파는데 한 개에 80원하는 물건 세 개를 사면 210원, 다섯 개를 사면 320원으로 할인해 준다고 한다. 어느 날 매상액이 모두 1440원이었고 한 명의 고객이 한 개, 세 개, 다섯 개 중 어느 한 가지만 샀다고 할 때, 이 날 물건을 사고 간 고객의 수로 적당하지 않은 것은?
- ① 6명 ② 9명 ③ 12명 ④ 14명 ⑤ 18명

해설

물건을 한 개, 세 개, 다섯 개를 산 사람의 수를 각각 x, y, z 라고 하면
 x, y, z 는 0이상의 정수이고
 $80x + 210y + 320z = 1440$ 양변을 10으로 나누면
 $8x + 21y + 32z = 144 \dots\dots ㉠$
㉠을 변형하면
 $3(48 - 7y) = 8(x + 4z) \dots\dots ㉡$
3, 8이 서로 소이므로
 $48 - 7y = 8k$
 $(k = 0, 1, 2, 3, \dots\dots, 6) \dots\dots ㉢$
㉢을 ㉡에 대입하면
 $x + 4z = 3k \dots\dots ㉣$
㉣에서 $7y = 48 - 8k$,
 $y = \frac{8(6 - k)}{7} \dots\dots ㉤$
㉤에서 $\frac{6 - k}{7}$ 가 정수이므로
 $k = 6, y = 0, x + 4z = 18$
 $\therefore (x, y, z)$
 $= (18, 0, 0), (14, 0, 1), (10, 0, 2),$
 $(6, 0, 3), (2, 0, 4)$
이 날 물건을 구입한 고객의 수는
 $x + y + z$ 이므로
 $x + y + z = 6, 9, 12, 15, 18$ 이다.