1. 방정식 $2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$에서
$x^2+4xy+4y^2+x^2+2x+1=0$,
$(x+2y)^2+(x+1)^2=0$
x, y가 실수이므로 $x+2y=0$ $\cdots\cdots$ ①, $x+1=0$ $\cdots\cdots$ ②
①, ②에서 $x=-1,\ y=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x+y=-\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면$2x^2+2(2y+1)+(4y^2+1)=0$ $\cdots\cdots$ ①
x 가 실수이므로 $\frac{D}{4}=(2y+1)^2-2(4y^2+1)\geq 0$
$\therefore\ (2y-1)^2\leq 0$
그런데 $2y-1$ 이 실수이므로 $2y-1=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
$2x^2+4x+2=0,\ (x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$ $\cdots\cdots$ ③
②, ③에서 $x+y=-\frac{1}{2}$

2. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$일 때, $x+y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5$

$=x^2-2(2y-1)x+4y^2-4y+1+y^2-4y+4$

$=x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2+(y-2)^2$

$=(x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$

$\therefore\ x-2y+1=0,\ y-2=0$이므로

$y=2,\ x-4+1=0 \quad \therefore\ x=3$

따라서 $x+y=3+2=5$

3. 방정식 $x^2+2y^2+2xy-4x-10y+13=0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x+y$ 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-2)x+2y^2-10y+13=0 \quad \cdots ㉠$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$\frac{D}{4}=(y-2)^2-\left(2y^2-10y+13\right) \geq 0$

$-y^2+6y-9 \geq 0, \; y^2-6y+9 \leq 0$

$(y-3)^2 \leq 0$ y 가 실수이므로 $y-3=0$

$\therefore y=3 \quad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore \; x=-1$

$\therefore \; x+y=-1+3=2$

4. x, y가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$

따라서

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

$x-2=2$, $y-1=2$일 때, $x=4$, $y=3$

$x-2=4$, $y-1=1$일 때, $x=6$, $y=2$

$x-2=-1$, $y-1=-4$일 때, $x=1$, $y=-3$

$x-2=4$, $y-1=-1$일 때, $x=6$, $y=0$

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

따라서 순서쌍은 $(3,\ 5)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(1,\ -3)$, $(6,\ 0)$, $(3,\ 5)$로 모두 6개이다.

5. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots ① \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore \ (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

6. N_1, N_2, N_3, $\cdots$, N_8은 모두 자연수이고, $N_1 < N_2 < \cdots < N_8$, $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_8 = 80$이라 할 때, N_8의 최댓값은? (단, $N_1 = 4$)

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_8$이므로 $N_2 = N_1 + 1$, $N_3 = N_2 + 1 = N_1 + 2$, $\cdots$, $N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$일 때, N_8은 최댓값이 된다.

$\therefore\ N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \cdots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$

$7N_1 + (1 + 2 + \cdots + 6) + N_8 = 80$

$28 + 21 + N_8 = 80$

$\therefore\ N_8 = 80 - 49 = 31$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2-(2a-1)x+a+1=0$ 의 두 근 α,β가 모두 정수일 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 의 값을 구하면? (단, a는 자연수)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

근이 정수이려면 판별식 $D=(2a-1)^2-4(a+1)=k^2$ (k 는 정수) 이어야 한다. 이 식을 정리하면 $4a^2-8a-3=k^2$, $(2a-2)^2-7=k^2$, $(2a-2)^2-k^2=7$, $(2a-2+k)(2a-2-k)=7$ a, k는 정수이므로

(i) $2a-2+k=1,\ 2a-2-k=7$ 에서

$a=3,\ k=-3$

(ii) $2a-2+k=7,\ 2a-2-k=1$ 에서

$a=3,\ k=3$

(iii) $2a-2+k=-1,\ 2a-2-k=-7$ 에서 $a=-1,\ k=3$

(iv) $2a-2+k=-7,\ 2a-2-k=-1$ 에서 $a=-1,\ k=-3$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2a-1}{a+1}=\frac{5}{4}$$

8. 어느 가게에서 물건을 파는데 한 개에 80원하는 물건 세 개를 사면 210원, 다섯 개를 사면 320원으로 할인해 준다고 한다. 어느 날 매상액이 모두 1440원이었고 한 명의 고객이 한 개, 세 개, 다섯 개 중 어느 한 가지만 샀다고 할 때, 이 날 물건을 사고 간 고객의 수로 적당하지 않은 것은?

① 6명 ② 9명 ③ 12명 ④ 14명 ⑤ 18명

해설

물건을 한 개, 세 개, 다섯 개를 산 사람의 수를 각각 $x,\ y,\ z$라고 하면

$x,\ y,\ z$는 0 이상의 정수이고

$80x+210y+320z=1440$ 양변을 10으로 나누면

$8x+21y+32z=144$ ⋯⋯㉠

㉠을 변형하면

$3(48-7y)=8(x+4z)$ ⋯⋯㉡

3, 8이 서로 소이므로

$48-7y=8k$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 6)$ ⋯⋯㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x+4z=3k$ ⋯⋯㉣

㉢에서 $7y=48-8k$,

$y=\dfrac{8(6-k)}{7}$ ⋯⋯㉤

㉤에서 $\dfrac{6-k}{7}$가 정수이므로

$k=6,\ y=0,\ x+4z=18$

$\therefore (x,\ y,\ z)$

$=(18,\ 0,\ 0),\ (14,\ 0,\ 1),\ (10,\ 0,\ 2),$

$(6,\ 0,\ 3),\ (2,\ 0,\ 4)$

이 날 물건을 구입한 고객의 수는

$x+y+z$이므로

$x+y+z=6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18$이다.