1. 다음 중 방정식 $x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$의 근이 <u>아닌</u> 것은?

① -1　　② 1　　③ 2

④ $1+2i$　　⑤ $1-2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$

$(x+1)(x^3-4x^2+9x-10)=0$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)=0$

$(x+1)(x-2)(x-1-2i)(x-1+2i)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 2,\ 1+2i,\ 1-2i$

따라서 근이 아닌 것은 1이다.

2. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

3. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$
③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$
⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4-4x^2-12,\quad x^2=Y$ 라 하자
$\Rightarrow\quad Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$
$Y=-2$ 또는 $Y=6$
$\Rightarrow\quad x^2=-2,\quad x^2=6$
$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}i,\quad x=\pm\sqrt{6}$
$\therefore\ x^4-4x^2-12$
$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

4. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　② $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　③ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}i$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$을 변형하면

$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0$,

$(x^2+1)^2 - x^2 = 0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x) = 0$,

$x^2 + x + 1 = 0$ 또는 $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x = \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

5. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \quad \cdots\cdots$ ㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4 \quad \cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

6. 방정식 $2x^3-3x^2+6=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ r$라 할 때, $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3-3x^2+6=0$의 세 근이
$\alpha,\ \beta,\ r$이므로
$2x^3-3x^2+6=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)$
양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면
$4\sqrt{2}-6+6$
$=2(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$
$\therefore\ (\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)=2\sqrt{2}$

7. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$에서
$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$이고
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0이다.

8. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$의 값을 구하면?

① 7　② 11　③ 15　④ 19　⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-1$
$x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 근이 α ,β ,γ 이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$
$=8+8-6+1=11$

9. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$의 해는?

① $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
② $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
③ $x = \frac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
④ $x = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2 + 8x + 17 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0$

$\therefore x + \frac{1}{x} = A$라 하자.

$A^2 + 8A + 15 = (A+3)(A+5)$

$= \left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 5\right) = 0$

$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$

$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

10. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α,β라 하면
네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$