

1. 0이 아닌 실수 x, y 가 $(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$ 을 만족할 때, x 에 관한 이 방정식은 실수 a 에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. ($a \neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$ 에서
 $x^2y^2 + 4a^2x^2 + y^2 + 4a^2 - 8axy = 0$
 $(x^2y^2 - 4axy + 4a^2) + (y^2 - 4axy + 4a^2x^2) = 0$
 $(xy - 2a)^2 + (y - 2ax)^2 = 0$
 $xy - 2a, y - 2ax$ 는 실수이므로
 $xy - 2a = 0, y - 2ax = 0$
 $\therefore xy = 2a, y = 2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2 = 2a$
($a \neq 0$) 이므로 $x^2 = 1, x = \pm 1$

2. 실수 x, y 에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 일 때, xy 의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 을
 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$
이 때, x 는 실수이므로 $\textcircled{1}$ 은 실근을 가져야 한다.
 $D = (y+1)^2 - 2(y^2 - 2y + 5) \geq 0$
 $-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad (y-3)^2 \leq 0$
 $\therefore y = 3$
 $y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $2x^2 + 8x + 8 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 = 0$
 $(x+2)^2 = 0$
 $\therefore x = -2 \quad \therefore xy = (-2) \cdot 3 = -6$

3. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{21}$ (단, $x < y$)을 만족하는 양의 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x + y$ 의 최댓값을 구하면?

① 484 ② 192 ③ 112 ④ 100 ⑤ 548

해설

$21(x + y) = xy, \quad xy - 21(x + y) = 0$
 $\therefore (x - 21)(y - 21) = 21^2 = 3^2 \times 7^2$
 $21x = (x - 21)y$ 이고 $y > x > 0$ 이므로
 $y - 21 > x - 21 > 0$
 $\therefore (x - 21, y - 21)$
 $= (1, 441), (3, 147), (7, 63), (9, 49)$
 $\therefore (x, y)$
 $= (22, 462), (24, 168), (28, 84), (30, 70)$
 $\therefore x + y$ 의 최댓값은 $22 + 462 = 484$

4. $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$

$m = -1, 7$