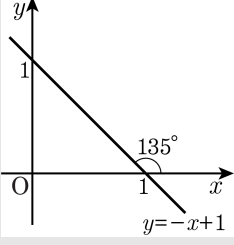


1. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : 기울기 -1
- ▷ 정답 : y 절편 1
- ▷ 정답 : x 축의 양의 방향 135°

해설

기울기 -1 , y 절편 1 ,
 x 축의 양의 방향과
이루는 각 135°



2. $x^2 + y^2 + x - y + k = 0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $k \leq \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \geq \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - k$$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2} - k > 0 \rightarrow k < \frac{1}{2}$

3. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

- ① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$ ④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

- ① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$
② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$
③ $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
④ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
⑤ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

4. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

5. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$

② $y = -x \pm 3$

③ $y = -x \pm 4$

④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$

⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y = -x \pm 2\sqrt{1+1}$

$\therefore y = -x \pm 2\sqrt{2}$

6. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2 + 3a + 1 &= (a + 1)^3 \\ \therefore N &= 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1 \\ &= (35 + 1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6 \\ \therefore \text{약수의 개수} &= (6 + 1) \times (6 + 1) = 49 \end{aligned}$$

7. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

- ① $(x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$ ② $(x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$
③ $(x - 1)(x + 1)^2(x + 2)$ ④ $(x - 1)(x + 4)^2(x + 2)$
⑤ $(x - 1)(x + 4)(x + 2)^2$

해설

인수정리에 의해

$$f(1) = 1 - a + b = 0$$

$$g(1) = 1 + a - 2b = 0$$

연립하면, $a = 3, b = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

조립제법을 이용하면,

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$\therefore \text{최소공배수: } (x - 1)^2(x + 4)(x + 2)$$

8. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w = \frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 1, \quad z\bar{z} = 2 \\ w\bar{w} &= \frac{z+1}{3z-2} \times \frac{\bar{z}+1}{3\bar{z}-2} \\ &= \frac{z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1}{9z\bar{z} - 6(z + \bar{z}) + 4} \\ &= \frac{2 + 1 + 1}{18 - 6 + 4} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

9. 다음 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x + 1.2 > 0.5x \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x \end{cases}$ 을 만족하는 모든 정수 x 의
합은?

- ① 6
- ② 3
- ③ 1
- ④ 0
- ⑤ -2

해설

i) $0.3x + 1.2 > 0.5x$ 의 양변에 10 을 곱하면
 $3x + 12 > 5x$
 $x < 6$

ii) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면
 $8x - 6 < 9x$
 $x > -6$
 $\therefore -6 < x < 6$

만족하는 정수는 $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 이고
이들의 합은 0 이다.

10. 두 부등식 $2(5 - 2x) \geq x + 5$, $2x + 1 > x + a$ 의 공통해가 존재하지 않을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \geq 2$

해설

$$2(5 - 2x) \geq x + 5, 5 \geq 5x \quad \therefore x \leq 1$$

$$2x + 1 > x + a \quad \therefore x > a - 1$$

따라서 해가 존재하지 않기 위해서는 $a - 1 \geq 1$ 이어야 한다.

$$\therefore a \geq 2$$

11. x 에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $a < b$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
② $a < b$ 일 때, $x \leq -1$, $x \geq 3$ 이다.
③ $a < 0$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
④ $b < 0$ 일 때, $x \leq -1$, $x \geq 3$ 이다.
⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 을 이항하여 정리하면
 $(a - b)x^2 - 2(a - b)x - 3(a - b) \geq 0$ (이차부등식이므로 $a \neq b$)
i) $a < b$ 이면 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 3$
ii) $a > b$ 이면
 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1$, $x \geq 3$

12. 부등식 $x^2 - 5|x| + 4 \leq 0$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하면?

- ① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

(i) $x > 0$
 $x^2 - 5x + 4 \leq 0$
 $(x - 1)(x - 4) \leq 0$
 $\Rightarrow 1 \leq x \leq 4$
(ii) $x < 0$
 $x^2 + 5x + 4 \leq 0$
 $(x + 1)(x + 4) \leq 0$
 $\Rightarrow -4 \leq x \leq -1$
 $\therefore$ 정수의 개수 : 8개

13. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

14. 이차부등식 $x^2 - 3x + 2 < 0$ 을 만족하는 모든 x 가 이차부등식 $x^2 - 2ax + a - 1 < 0$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > 0$

② $a > 1$

③ $0 < a < 1$

④ $0 \leq a \leq 1$

⑤ $a \geq 1$

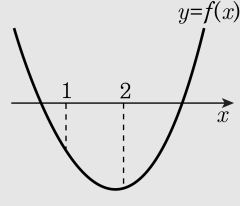
해설

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 2$$

이차부등식 $x^2 - 2ax + a - 1 < 0$ 이 $1 < x < 2$ 에서 항상 성립해야하므로

$f(x) = x^2 - 2ax + a - 1$ 로 놓으면 다음 그림과 같이 $f(1) \leq 0$, $f(2) \leq 0$ 이어야 한다.



$$f(1) = 1 - 2a + a - 1 \leq 0 \text{에서 } a \geq 0 \dots\dots \text{㉠}$$

$$f(2) = 4 - 4a + a - 1 \leq 0 \text{에서 } a \geq 1 \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a \geq 1$

15. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형
③ 정삼각형 ④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 에서 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \text{ 이고,}$$

$$a, b, c \text{ 는 실수이므로, } a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

16. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

17. 방정식 $x^2+x+2=0$ 의 한 해근을 ω 라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega)=3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$ 의 한 해근이 ω 이므로
 $\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \omega^2=-\omega-2$
 $f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$
 $= (b-a)\omega+(12-2a)$
 $f(\omega)=3\omega$ 이므로
 $(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$
 $b-a=3, 12-2a=0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$
 $\therefore a=6, b=9$

18. 부등식 $x^2 - 3 < x + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 2

④ 4

⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2 - 3 < x + |2x + 1|$

(i) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$x^2 - 3 < x + 2x + 1, \quad x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x - 4)(x + 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 4$$

(ii) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$x^2 - 3 < x - (2x + 1), \quad x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x + 2)(x - 1) < 0$$

$$\therefore -2 < x < -\frac{1}{2}$$

(i), (ii) 에서 $-2 < x < 4$

$$\therefore \alpha = -2, \beta = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2$$

19. 세 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 외심의 좌표를 $P(a,b)$ 라 할 때, $a^2 - b^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심 (외접원의 중심)은 세 꼭짓점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{PO}^2 = \overline{PA}^2$ 으로부터

$$a^2 + b^2 = (a - 1)^2 + (b - 1)^2, \quad a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{PO}^2 = \overline{PB}^2$ 으로부터

$$a^2 + b^2 = (a - 2)^2 + (b + 2)^2, \quad a - b = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{로 부터 } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 1 \times 2 = 2$$

20. 원점에서 직선 $(a-1)x + (a+3)y - 4 = 0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$f(a) = \frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2 + (a+3)^2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2a^2 + 4a + 10}}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$$2a^2 + 4a + 10 = 2(a^2 + 2a) + 10 = 2(a+1)^2 + 8$$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$$f(a) \text{ 의 최댓값은 } \therefore \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

21. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$

의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2 으로 나누면
 $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \right\} - 3 = 0$
 $x + \frac{1}{x} = z$ 로 놓으면
 $z^2 + 2z - 3 = (z + 3)(z - 1) = 0$
 $\therefore z = -3$ 또는 $z = 1$
(i) $z = -3$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = -3$ 에서 $x^2 + 3x + 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$: 실근
(ii) $z = 1$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = 1$ 에서
 $x^2 - x + 1 = 0$
 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해는 허수이므로
 w 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해이다.
 $\therefore w^2 - w + 1 = 0, w^3 = -1$
 $\therefore w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$
 $= w^2 \cdot w^{2004} + \frac{1}{w^2 \cdot w^{2004}}$
 $= w^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2 = w^2 - w = -1$

22. 사차방정식 $x^4 - 3x - 1 = 0$ 의 네 근을 x_1, x_2, x_3, x_4 라 할 때, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$ 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} x^4 &= 3x + 1 \text{ 이므로} \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 \\ &= 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4 \\ x^4 - 3x - 1 \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ &= x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + \cdots + x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

x^3 의 계수를 비교하면

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\therefore x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 4$$

23. $N_1, N_2, N_3, \dots, N_8$ 은 모두 자연수이고, $N_1 < N_2 < \dots < N_8$,
 $N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_8 = 80$ 이라 할 때, N_8 의 최댓값은? (단,
 $N_1 = 4$)

① 29

② 30

③ 31

④ 32

⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_8$ 이므로 $N_2 = N_1 + 1$, $N_3 = N_2 + 1 =$
 $N_1 + 2$, $\dots$, $N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$ 일 때, N_8 은 최댓값이 된다.

$$\therefore N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \dots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$$

$$7N_1 + (1 + 2 + \dots + 6) + N_8 = 80$$

$$28 + 21 + N_8 = 80$$

$$\therefore N_8 = 80 - 49 = 31$$

24. $x + y + z = 3$ 이고, $x + y$, $y + z$, $z + x$ 의 최솟값이 각각 $a + 1$, $a + 3$, $a + 5$ 일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x + y \geq a + 1$$

$$y + z \geq a + 3$$

$$z + x \geq a + 5$$

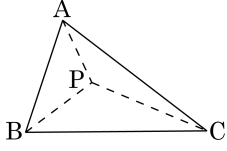
위 부등식을 변끼리 더하면 $2(x + y + z) \geq 3a + 9$

$$x + y + z = 3 \text{ 이므로 } 6 \geq 3a + 9$$

$$\therefore a \leq -1$$

따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

25. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$ 가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC의 길이는?



- ① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다. 따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$$

$$\therefore \overline{PD} = 2$$

$\triangle PBC$ 에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2)$$

$$3^2 + 5^2 = 2(2^2 + \overline{BD}^2)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13}, \overline{BC} = 2\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$

