1. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

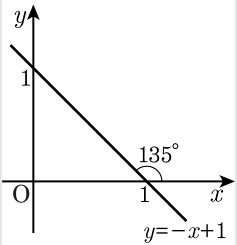
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

▷ 정답 : x축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



2. $x^2+y^2+x-y+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \ge \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-k$$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2}-k>0 \quad \rightarrow \quad k<\frac{1}{2}$

3. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

① $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$
② $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$
③ $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$
④ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

① $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$

② $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = -\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

4. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

5. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=-x\pm 2$ ② $y=-x\pm 3$ ③ $y=-x\pm 4$

④ $y=-x\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y=-x\pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y=-x\pm 2\sqrt{1+1}$

$\therefore\ y=-x\pm 2\sqrt{2}$

6. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore \; N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

7. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$의 최대공약수가 $x - 1$일 때, $f(x), g(x)$의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)^2(x+1)(x+2)$

② $(x-1)^2(x+4)(x+2)$

③ $(x-1)(x+1)^2(x+2)$

④ $(x-1)(x+4)^2(x+2)$

⑤ $(x-1)(x+4)(x+2)^2$

해설

인수정리에 의해

$f(1) = 1 - a + b = 0$

$g(1) = 1 + a - 2b = 0$

연립하면, $a = 3, b = 2$

$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$

조립제법을 이용하면,

$f(x) = (x-1)^2(x+2)$

$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$

$\therefore$ 최소공배수: $(x-1)^2(x+4)(x+2)$

8. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w=\frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$z+\overline{z}=1,\ z\overline{z}=2$

$$\begin{aligned} w\overline{w} &= \frac{z+1}{3z-2}\times\frac{\overline{z}+1}{3\overline{z}-2} \\ &= \frac{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}{9z\overline{z}-6(z+\overline{z})+4} \\ &= \frac{2+1+1}{18-6+4} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

9. 다음 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x + 1.2 > 0.5x \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x \end{cases}$ 을 만족하는 모든 정수 x 의 합은?

① 6 ② 3 ③ 1 ④ 0 ⑤ -2

해설

i) $0.3x + 1.2 > 0.5x$ 의 양변에 10 을 곱하면

$3x + 12 > 5x$

$x < 6$

ii) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} < \frac{3}{4}x$ 의 양변에 12 를 곱하면

$8x - 6 < 9x$

$x > -6$

$\therefore -6 < x < 6$

만족하는 정수는 $-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이고 이들의 합은 0 이다.

10. 두 부등식 $2(5-2x) \geq x+5$, $2x+1 > x+a$의 공통해가 존재하지 않을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \geq 2$

해설

$2(5-2x) \geq x+5$, $5 \geq 5x$ $\therefore$ $x \leq 1$

$2x+1 > x+a$ $\therefore$ $x > a-1$

따라서 해가 존재하지 않기 위해서는 $a-1 \geq 1$이어야 한다.

$\therefore$ $a \geq 2$

11. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq x \leq 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

12. 부등식 $x^2-5|x|+4\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

(ⅰ) $x>0$

$x^2-5x+4\leq 0$

$(x-1)(x-4)\leq 0$

$\Rightarrow \quad 1\leq x\leq 4$

(ⅱ) $x<0$

$x^2+5x+4\leq 0$

$(x+1)(x+4)\leq 0$

$\Rightarrow \quad -4\leq x\leq -1$

$\therefore$ 정수의 개수 : 8개

13. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

14. 이차부등식 $x^2-3x+2<0$을 만족하는 모든 x가 이차부등식 $x^2-2ax+a-1<0$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a>0$ ② $a>1$ ③ $0<a<1$

④ $0\le a\le 1$ ⑤ $a\ge 1$

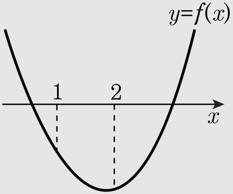
해설

$x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

이차부등식 $x^2-2ax+a-1<0$이 $1<x<2$에서 항상 성립해야하므로

$f(x)=x^2-2ax+a-1$로 놓으면 다음 그림과 같이 $f(1)\le 0$, $f(2)\le 0$이어야 한다.



$f(1)=1-2a+a-1\le 0$에서 $a\ge 0$ ······ ㉠

$f(2)=4-4a+a-1\le 0$에서 $a\ge 1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge 1$

15. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형
② 이등변삼각형
③ 정삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$ 이고,

a, b, c 는 실수이므로, $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

16. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

17. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\quad\quad\ =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0\ (\because\ \omega$는 허수$)$

$\therefore\ a=6,\ b=9$

18. 부등식 $x^2-3<x+\sqrt{4x^2+4x+1}$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2-3<x+|2x+1|$

(i) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$x^2-3<x+2x+1,\ x^2-3x-4<0$

$(x-4)(x+1)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \leq x<4$

(ii) $x<-\frac{1}{2}$ 일 때,

$x^2-3<x-(2x+1),\ x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore\ -2<x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-2<x<4$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=4$

$\therefore\ \alpha+\beta=2$

19. 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(2,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a,b)$라 할 때, a^2-b^2을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$으로부터

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\ a+b=1\cdots$㉠

$\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$으로부터

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b+2)^2,\ a-b=2\cdots$㉡

㉠, ㉡로 부터 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\times2=2$

20. 원점에서 직선 $(a-1)x+(a+3)y-4=0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$f(a)=\frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2+(a+3)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2a^2+4a+10}}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$2a^2+4a+10=2(a^2+2a)+10=2(a+1)^2+8$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$f(a)$ 의 최댓값은 $\therefore\ \frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

21. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면
$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
$$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-3=0$$
$x+\frac{1}{x}=z$로 놓으면
$z^2+2z-3=(z+3)(z-1)=0$
$\therefore\ z=-3$ 또는 $z=1$
(i) $z=-3$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 실근
(ii) $z=1$일 때,
$x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
$x^2-x+1=0$의 해는 허수이므로
w는 $x^2-x+1=0$의 해이다.
$\therefore\ w^2-w+1=0,\ w^3=-1$
$$\therefore\ w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$$
$$=w^2\cdot w^{2004}+\frac{1}{w^2\cdot w^{2004}}$$
$$=w^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2=w^2-w=-1$$

22. 사차방정식 $x^4-3x-1=0$의 네 근을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^4=3x+1$이므로

$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$

$=3(x_1+x_2+x_3+x_4)+4$

x^4-3x-1

$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$=x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+\cdots+x_1x_2x_3x_4$

x^3의 계수를 비교하면

$x_1+x_2+x_3+x_4=0$

$\therefore\ x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=4$

23. N_1, N_2, N_3, $\cdots$, N_8은 모두 자연수이고, $N_1 < N_2 < \cdots < N_8$, $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_8 = 80$이라 할 때, N_8의 최댓값은? (단, $N_1 = 4$)

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_8$이므로 $N_2 = N_1 + 1$, $N_3 = N_2 + 1 = N_1 + 2$, $\cdots$, $N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$일 때, N_8은 최댓값이 된다.

$\therefore\ N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \cdots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$

$7N_1 + (1 + 2 + \cdots + 6) + N_8 = 80$

$28 + 21 + N_8 = 80$

$\therefore\ N_8 = 80 - 49 = 31$

24. $x+y+z=3$ 이고, $x+y$, $y+z$, $z+x$ 의 최솟값이 각각 $a+1$, $a+3$, $a+5$ 일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y \geq a+1$

$y+z \geq a+3$

$z+x \geq a+5$

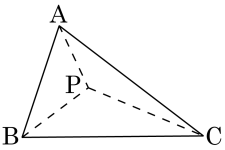
위 부등식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z) \geq 3a+9$

$x+y+z=3$ 이므로 $6 \geq 3a+9$

$\therefore\ a \leq -1$

따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

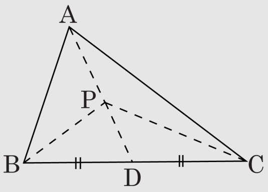
25. 다음 그림과 같이 $\triangle$ABC 의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP}=4$, $\overline{BP}=3$, $\overline{CP}=5$가 되었다고 한다. 이 때, 선분 BC 의 길이는?



① $4\sqrt{3}$　② $5\sqrt{3}$　③ $6\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle$ABC 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면



$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$

$\therefore \overline{PD} = 2$

$\triangle$PBC 에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\left(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13},\ \overline{BC} = 2\cdot\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$