1. 다음 부등식을 풀면?

$$0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$$

① $-9 < x \leq 3$ ② $-9 \leq x < 3$ ③ $-9 \leq x \leq 3$

④ $-9 < x < 3$ ⑤ $3 \leq x < 9$

해설

$$0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.2x - 3 < \frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \leq 3 - 0.6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 30 < 5x - 3 \\ 5x - 3 \leq 30 - 6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 5x < -3 + 30 \\ 5x + 6x \leq 30 + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x < 27 \\ 11x \leq 33 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -9 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$\therefore\ -9 < x \leq 3$

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-1 < x+1 < x^2-3x+1 \\ x+3 > -x+2 \end{cases}$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $2a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$\begin{cases} \underbrace{x^2-1 < x+1}_{\text{(가)}} \underbrace{< x^2-3x+1}_{\text{(나)}} \\ x+3 > -x+2 \cdots \text{(다)} \end{cases}$$

(가)에서 $x^2-x-2<0$, $(x-2)(x+1)<0$

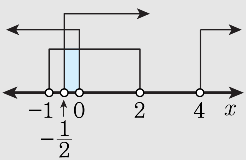
$\therefore -1 < x < 2$

(나)에서 $x^2-4x>0$, $x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

(다)에서 $2x > -1$

$\therefore x > -\dfrac{1}{2}$



$-\dfrac{1}{2} < x < 0$

따라서 $a = -\dfrac{1}{2}$, $b=0$이므로 $2a+b = -1+0 = -1$

3. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : ______ 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

4. 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점이고,

또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,

$a=b^2+1 \cdots\cdots$ ㉠

$l=\dfrac{|a-b+1|}{\sqrt{2}} \cdots$ ㉡

㉠를 ㉡에 대입하면

$$l=\frac{|b^2-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.

따라서 $a+b=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{4}$이므로

$\therefore\ 4(a+b)=7$

5. 직선 $3x + y - 5 = 0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x+y-1=0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로

직선 $3x + y - 5 = 0$에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y - n$을 대입하면

$3(x - 1) + (y - n) - 5 = 0$

$3x + y - n - 8 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 $3x + y - 1 = 0$과 일치하므로 $-n - 8 = -1 \therefore\ n = -7$

6. x에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1) - 1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 범위는?

① $a \le -3$ 또는 $a \ge 1$　　② $-3 \le a \le 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$　　④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \le a \le 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1)-1$을 전개하여 이항하면 $x^2+(1-a)x-a+1 < 0$
이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \le 0$이면 부등식의 해가 없다.

$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \le 0$

$(a-1)(a+3) \le 0$

$\therefore \quad -3 \le a \le 1$

7. 부등식 $\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2-|x|-2) \le 0$ 을 풀면?

① $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -2$
② $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -1$
③ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -1$
④ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -2$
⑤ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le 0$

해설

① $x > 0$이면 $|x| = x,\ x+\frac{1}{x} > 0$이므로

$x^2 - x - 2 \le 0 \ \rightarrow\ (x-2)(x+1) \le 0$

$\therefore\ -1 \le x \le 2$

$\therefore\ 0 < x \le 2\ (\because\ x > 0)$

② $x < 0$이면 $|x| = -x,\ x+\frac{1}{x} < 0$이므로

$x^2 + x - 2 \ge 0 \ \rightarrow\ (x-1)(x+2) \ge 0$

$\therefore\ x \le -2,\ x \ge 1$

$\therefore\ x \le -2\ (\because\ x < 0)$

①, ②에서 $0 < x \le 2,\ x \le -2$

8. 두 대의 승용차 A, B가 같은 거리를 가는데 A는 거리의 반은 시속 $v$km로 달리고, 나머지 거리는 시속 u km로 달린다고 한다, 또한 B는 소요된 시간의 반은 시속 u km로 달리고 나머지 소요된 시간은 v km로 달린다고 한다. 승용차 A, B의 평균 속력이 각각 x km/시, y km/시일 때, x와 y의 대소 관계를 바르게 나타내 것은?

① $x \le y$ ② $x \ge y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A가 달린 거리를 s,

시간을 t라 하면 $t = \dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}} = \frac{s}{\dfrac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u+v} = x$$

승용차 B의 평균 속력은 $\dfrac{1}{2}(u+v) = y$

$$y - x = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{2uv}{u+v}$$

$$= \frac{(u+v)^2 - 4uv}{2(u+v)} \ge 0$$

따라서 $y - x \ge 0$이므로 $x \le y$이다.

9. $1 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$　② $a < 2$　③ $a < 3$　④ $a < 4$　⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$

$1 \le x \le 2$ 에서

이 부등식이 항상 성립해야 하므로

방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.

$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면

$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠

$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a < 1$

10. 점 A$(0,2)$, B$(2,0)$, C$(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle$ABC 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

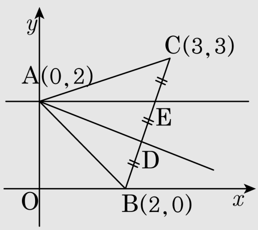
해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이

A$(0,2)$ 를 지나는 직선이므로

$\triangle$ABC 를 그림과 같이

2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는

점D, E 를 지나게 된다.

D$\left(\frac{7}{3},1\right)$, E$\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because$ k 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

11. 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(4,\ 0)$ 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4-2\times1}{1-2}, \dfrac{1\times0-2\times3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2,\ 6)$ 을 지나므로

$y-6 = 1\cdot(x+2)$, $\ y = x+8$

$a = 1$, $b = 8$ $\quad \therefore a + b = 9$

12. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$에 접하는 원의 넓이는?

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 9π ⑤ 12π

해설

점$(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

13. $x^2+y^2+4x-8y+16=0$ 밖의 점 $(a,\ a)$ 로부터 이 원에 그은 접선의 길이가 $\sqrt{14}$ 가 되도록 a 의 값을정하면?

① -1 ② 1 ③ -2 또는 -4

④ 2 또는 4 ⑤ 1 또는 2

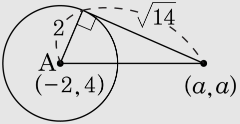
해설

준식$= x^2+4x+y^2-8y+16=0$

$\rightarrow\ (x+2)^2+(y-4)^2=4\cdots$ ㉠

점 $(a,\ a)$로부터

㉠에 그은 접선의 길이를 l 이라 하면



$l^2=14=(a+2)^2+(a-4)^2-4$

$\rightarrow\ a^2+4a+4+a^2-8a+16-4-14=0$

$\rightarrow\ 2a^2-4a+2=0\ \rightarrow\ a^2-2a+1=0$

$\rightarrow\ (a-1)^2=0$

$\therefore\ a=1$

14. 점 $\mathrm{P}(a,0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

① $(1,0)$, $(7,0)$ ② $(-1,0)$, $(7,0)$ ③ $(1,0)$, $(-7,0)$

④ $(-1,0)$, $(5,0)$ ⑤ $(1,0)$, $(-5,0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3,2)$, 접점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-3)^2+2^2}$

CPQ는 직각삼각형이므로

$(a-3)^2+4=2^2+4^2$

$a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1,0)$, $(7,0)$이다.

15. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한
직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
$-k = -3$
$\therefore k = 3$

16. x보다 크지 않은 최대의 정수와 x보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ ② $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ ③ $\{x|2 \leq x < 3\}$

④ $\{x|2 < x \leq 3\}$ ⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$를 x보다 크지 않는 최대의 정수,

$< x >$를 x보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.

$x = n$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n$이므로 $n + n = 5,\ n = \frac{5}{2}$

$\therefore$ 적당하지 않다.

$n < x < n + 1$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n + 1$이므로 $n + n + 1 = 5$

$\therefore n = 2$

$\therefore 2 < x < 3$

17. <보기> x에 대한 부등식 $ax^2+4ax+5a>0$의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $a>0$일 때 해는 모든 실수이다.
ㄴ $a=0$일 때 해는 $x=0$뿐이다.
ㄷ $a<0$일 때 해는 없다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$ax^2+4ax+5a>0$에서
$a(x^2+4x+5)>0,\ a\{(x+2)^2+1\}>0$
ㄱ $a>0$일 때 $(x+2)^2+1>0$ $\therefore$ 모든 실수
ㄴ $a=0$일 때 $0\cdot\{(x+2)^2+1\}>0$ $\therefore$ 해는 없다.
ㄷ $a<0$일 때 $(x+2)^2+1<0$ $\therefore$ 해는 없다.

18. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-1 \leq a \leq 1$　② $-1 < a \leq 0$　③ $-1 < a < 0$

④ $0 \leq a < 1$　⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$ 로 놓으면

$t^2 + t - 6 \geq 0,\ (t+3)(t-2) \geq 0$

$\therefore\ t \leq -3$ 또는 $t \geq 2$

(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때

$x^2 + 2ax + 3 \leq -3$ 에서 $x^2 + 2ax + 6 \leq 0$

$y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는

아래로 볼록한 포물선이므로

모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때

$x^2 + 2ax + 3 \geq 2$ 에서 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore\ -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii) 에서 $-1 \leq a \leq 1$

19. 두 부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$, $x^2 - x + k \le 0$에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3 < x \le 6$일 때, 상수 k 의 값은?

① -48　② -30　③ -18　④ 12　⑤ 24

해설

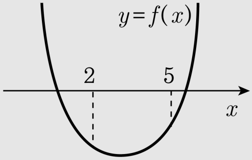
부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$ 에서
$(x+5)(x-3) > 0$, $x > 3$ 또는 $x < -5$
부등식 $x^2 - x + k \le 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3 < x \le 6$ 이므로
$x^2 - x + k \le 0$ 를 만족하는 범위는
$-5 \le x \le 6$ $(x-6)(x+5) \le 0$
$x^2 - x - 30 \le 0$
$\therefore k = -30$

20. 이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 에서
$(x-2)(x-5)=0 \therefore\ x=2$ 또는 $x=5$
$f(x)=x^2-6x+k$ 로 놓으면 함수 $y=f(x)$ 의
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)<0$, $f(5)<0$ 이므로
$f(2)=-8+k<0$ 에서 $k<8$
$f(5)=-5+k<0$ 에서 $k<5$
$\therefore\ k<5\quad\therefore$ 정수 k 의 최댓값은 4 이다.

21. 직선 $3x+y=8$이 두 점 $A(4,\ -3)$, $B(1,\ 2)$를 잇는 선분 AB를 $1\ :\ m$으로 내분할 때, 상수 m의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 점 $A(4,\ -3)$, $B(1,\ 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1\ :\ m$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{4m+1}{m+1},\ \dfrac{-3m+2}{m+1}\right)$ 이다.

이 점이 직선 $3x+y=8$ 위에 있으므로

$$3\times\frac{4m+1}{m+1}+\frac{-3m+2}{m+1}=8$$

따라서 $m=3$

22. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ \ x+3y+k=0,\ \ 2x-y+3=0$$

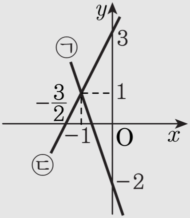
① $k \neq -2$ ② $k \neq -3$ ③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$ ⑤ $k \neq -11$

해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.



㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$, $\quad \therefore\ k \neq -2$

23. 원점 O 와 점 $A(10,0)$ 으로부터 직선$3x+4y+30=0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

① 64 ② 72 ③ 80 ④ 81 ⑤ 90

해설

$$\overline{OP} = \frac{|\,30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$$

$$\overline{AQ} = \frac{|\,30+30\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 12$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2}\cdot(\overline{OP}+\overline{AQ})\cdot\overline{PQ} = \frac{1}{2}\cdot(6+12)\cdot 8 = 72$$

24. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
ㄴ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
ㄷ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의
비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는
$(0,0)$ 과 $(-4,0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는
원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로
나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가
최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의
넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=$
$\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA=30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로
둘레의 길이는 4π 이다

25. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$인 원을 x축 방향으로 a만큼 y축 방향으로 b만큼 평행이동 하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=1$ ② $a^2+b^2=4$ ③ $a^2+b^2=9$

④ $a^2+b^2=16$ ⑤ $a^2+b^2=25$

해설

$(x-1)^2+(y+2)^2=4 \cdots ㉠$

원 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼,

y 의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$\{(x-a)-1\}^2+\{(y-b)+2\}^2=4$

$\{x-(a+1)\}^2+\{y-(b-2)\}^2=4 \cdots ㉡$

원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

$\therefore\ d=\sqrt{(a+1-1)^2+(b-2+2)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2}=2+2=4$

$\therefore\ a^2+b^2=16$

26. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 의 직선 $y = 2x$ 에 대한 대칭점을 Q, 점 Q 를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점을 R 이라 하면 두 점 R 과 P 가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, $3a + b$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{Q} = (X,\ Y)$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 는 $y = 2x$ 에 수직하고,
P, Q 의 중점은 $y = 2x$ 위에 존재한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{Y - b}{X - a} \times 2 = -1, \quad \frac{Y + b}{2} = 2 \times \frac{X + a}{2}$$

두 식을 연립하면, $X = \dfrac{4b - 3a}{5}, \quad Y = \dfrac{4a + 3b}{5}$

이제 Q 를 x 축으로 1 평행이동 시키면,

$$\mathrm{R} = \left(\frac{4b - 3a + 5}{5},\ \frac{4a + 3b}{5}\right)$$

R 과 P 가 $y = x$ 대칭이므로,

$$\frac{4b - 3a + 5}{5} = b, \quad \frac{4a + 3b}{5} = a$$

정리하면 $3a + b = 5,\ a = 3b$

두 식을 연립하면, $a = \dfrac{3}{2}, \quad b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad 3a + b = 5$

27. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m의 값들의 합을 구하면?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면

$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \cdots\cdots$ ㉠

이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3, 2)$ 사이의 거리는 2이어야 한다.

즉, $\dfrac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$9m^2+12m+4=4m^2+4$

$\therefore\ 5m^2+12m=0$

따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$

28. 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(1,4)$ 를 다음 평행이동식 $f:(x,y) \to (x+m, y+n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\mathrm{Q}=(1+m, 4+n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기는 $y=2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2}, \frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y=2x$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ i) $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$

ii) $\frac{8+n}{2}=m+2$

i) 과 ii) 를 연립하면, $m=\frac{8}{5}$, $n=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ m+n=\frac{4}{5}$

29. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 $a,\ b,\ c$ 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 8 + c \geq 9$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 6 + c \geq 7$

$\therefore\ b = 8$ 또는 9

1), 2) 에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3,\ b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

30. 어떤 공장에서 벨트와 신발을 만드는 데 드는 비용과 판매가는 다음과 같다.

	재료비(원)	가공비(원)	판매가(원)
벨트	5000	3000	10000
신발	4000	7000	15000

하루에 만드는 벨트와 신발의 개수의 합이 250 개이고, 재료비는 140 만원 이하, 가공비는 115 만원 이하가 되게 하려고 한다. 하루에 만든 벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대 판매금액을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 3000000 원

해설

벨트의 개수를 x 개라 하고 신발의 개수를 y 개라 하면, $x + y = 250$, $y = 250 - x$

재료비는 140 만원 이하이므로

$5000x + 4000y \leq 1400000$,

$5x + 4(250 - x) \leq 1400 \cdots$ ㉠

가공비는 115 만원 이하이므로

$3000x + 7000y \leq 1150000$,

$3x + 7(250 - x) \leq 1150 \cdots$ ㉡

㉠ 을 풀면 $x \leq 400$

㉡ 을 풀면 $x \geq 150$

$\therefore \ 150 \leq x \leq 400$

벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대한 많은 금액을 받으려면, 신발을 많이 판매해야 하고 벨트는 적게 판매해야 한다.

따라서 $x = 150$, $y = 250 - 150 = 100$ 일 때,

최대 판매 금액은 $150 \times 10000 + 100 \times 15000 = 3000000$ (원) 이다.

31. 가위로 어떤 볼록사각형의 대각선을 따라 잘랐더니 세 변의 길이가 각각 4, 5, y 인 삼각형 A 와 12, y, x 인 삼각형 B 가 만들어졌다. 삼각형 A 의 변의 길이 중 y 가 가장 길고, 삼각형 B 의 변의 길이 중 y 가 가장 짧을 때, x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 < x < 21$

해설

삼각형 A 에서 $y < 4 + 5$, 즉 $y < 9$
삼각형 B 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < y + 12$
그런데 $y < 9$ 이므로 $x < y + 12 < 9 + 12$
$\therefore\ x < 21$
2) 12 가 가장 긴 변인 경우 : $12 < x + y$
그런데 $y < 9$ 이므로 $12 < x + y < x + 9$
$\therefore\ x > 3$
따라서 1), 2) 에 의해서 $3 < x < 21$ 이다.

32. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1, 5)$, $\mathrm{Q}(-2, -4)$, $\mathrm{R}(5, 3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0, -1)$ ② $(0, 0)$ ③ $(0, 1)$

④ $(1, 0)$ ⑤ $(1, 1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$ $\cdots$ ①

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2$ $\cdots$ ②

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$ $\cdots$ ③

$\overline{\mathrm{AP}^2}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

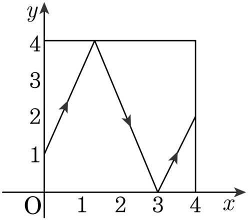
①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

33. 점 $(0,\ 1)$에서 출발한 빛이 그림과 같이 정사각형의 변에서 두 번 반사되어 점 $(4,\ 2)$에 도달하였을 때, 빛이 이동한 거리를 구하여라. (단, 입사각과 반사각은 같다)



▶ 답 :

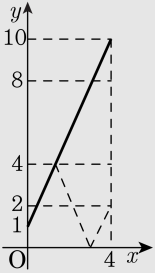
▷ 정답 : $\sqrt{97}$

해설

빛이 이동한 거리는 대칭성을 이용하면 그림과 같이 두 점 $(0,\ 1)$ 과 $(4,\ 10)$ 사이의 거리임을 알 수 있다.

따라서 빛이 이동한 거리는

$\sqrt{(4-0)^2+(10-1)^2} = \sqrt{97}$ 이다.

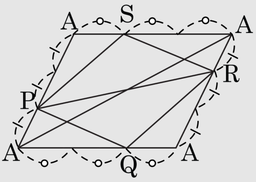


34. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. $A(-1,5), B(-4,-1)$이고 $R(7,6)$일 때, 점 S의 좌표는?

① $(1,6)$ ② $(1,7)$ ③ $(2,6)$ ④ $(2,7)$ ⑤ $(3,6)$

해설

다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고
대각선 PR 의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.



$A(-1,5), B(-4,-1)$이므로 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{-8-1}{2+1}, \frac{-2+5}{2+1}\right)$$

$\therefore P(-3,1)$

$R(7,6)$이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$$

즉 $\left(2, \frac{7}{2}\right) \cdots$ ㉠

이 때, 점 $D(a,b)$로 놓으면
대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{-4+a}{2} = 2$에서 $a = 8$

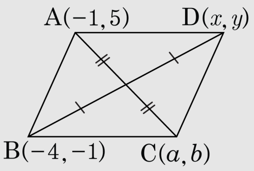
$\frac{-1+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $b = 8$

따라서 점 $D(8,8)$이므로
변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

$$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 $S(2,6)$

[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를
$C(a,b)$, $D(x,y)$로 놓으면
$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로



$\frac{-1+a}{2} = \frac{-4+x}{2}$, $\frac{5+b}{2} = \frac{-1+y}{2}$에서

$x - a = 3 \cdots$ ㉠

$y - b = 6 \cdots$ ㉡

$R(7,\ 6)$이므로 $\frac{2x+a}{3} = 7$에서 $a + 2x = 21 \cdots$ ㉢

$\frac{2y+b}{3} = 6$에서 $b + 2y = 18 \cdots$ ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 5, x = 8$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b = 2, y = 8$

$\therefore D(8,8)$

그러므로 변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

$$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 $S(2,6)$

35. 세 점 A(1, 4), B(−2, 3), C(3, −2)를 꼭짓점으로 하는 △ABC 가 있다. ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D(a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

각의 이등분선의 정리에 의해, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\therefore\ \sqrt{10} : 2\sqrt{10} = \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$

$\therefore$ D 는 $\overline{BC}$를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$$D = \left(\frac{1 \times 3 + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 3}{1+2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$\therefore\ a + b = 1$

36. 정점 $A(-2,\ 3)$과 직선 $y=2x-1$ 위의 동점 P를 잇는 선분 $\overline{AP}$를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

① $y=x+\dfrac{13}{3}$ ② $y=2x+\dfrac{13}{3}$ ③ $y=3x+\dfrac{13}{3}$

④ $y=4x+\dfrac{13}{3}$ ⑤ $y=5x+\dfrac{13}{3}$

해설

점 $P(a,\ 2a-1)$, $Q(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{1\cdot a+2\cdot(-2)}{1+2}=\frac{a-4}{3}$$

$$y=\frac{1\cdot(2a-1)+2\cdot 3}{1+2}=\frac{2a+5}{3}$$

여기에서 a를 소거하여 $x,\ y$의 관계식을 구하면

$$\therefore\ y=2x+\frac{13}{3}$$

37. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0, 5)$ 와 $\mathrm{B}(8, 1)$ 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \leq a \leq 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$

이 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{B}(8,\ 1)$ 을 지나므로

$a^2 - 10b + 25 = 0$, $a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$

두 식을 연립하면

$4a^2 - 80a + 300 = 0$, $4(a-5)(a-15) = 0$

그런데

$0 \leq a \leq 8$ 이므로 $a = 5,\ b = 5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$\therefore\ x + 2y - 10 = 0$

따라서 원의 중심 $(5,\ 5)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

38. 두 원 $x^2+y^2+2x-2my+m^2-4=0$, $x^2+y^2-2mx-2y+m^2-8=0$ 이 직교할 때 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{6}$

▷ 정답 : $-\sqrt{6}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$(x+1)^2+(y-m)^2=5$

$(x-m)^2+(y-1)^2=9$

두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로

$(m+1)^2+(1-m)^2=14$

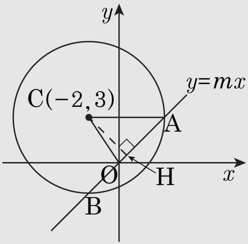
$m^2=6$

$m=\pm\sqrt{6}$

39. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서

직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\triangle$CAH 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$

$= 25 - \overline{CH}^2$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$ 가 최소이다.

$\triangle$COH 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$

$\overline{CH}$ 가 최대가 되기 위해서는

$\overline{CH} = \overline{CO}$ ($\overline{OH} = 0$) 일 때이므로

$\overline{CO} \perp \overline{AB}$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

40. 점 $(1,2)$ 에 대한 점 (a,b) 의 대칭점을 (a',b') 이라 하고, 점 (a,b) 가 직선 $y=3x+1$ 위를 움직일 때, 다음 중 점 (a',b') 이 움직이는 도형 위의 점은?

① $(-1,2)$ ② $(0,-1)$ ③ $(1,0)$
④ $(2,1)$ ⑤ $(3,5)$

해설

$y=3x+1$ 위의 점 $(a,\ b)$ 와 대칭점 $(a',\ b')$ 의 중점이 $(1,\ 2)$ 이므로

$$\frac{a'+a}{2}=1,\ \frac{b'+b}{2}=2$$

$a'=2-a,$

$b'=4-b=3-3a\ \ (\because\ b=3a+1)$

$\therefore\ (a',\ b')=(2-a,\ 3-3a)$

$x=2-a, y=3-3a$ 라 하고 a 를 소거하면

$y=3-3(2-x)\ ,\ \ y=3x-3$

즉 (a',b') 은 직선 $y=3x-3$ 위를 움직인다.

$\therefore\ (1,\ 0)$ 이 이 직선 위에 있다.