1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다 ② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수 ④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설
$(x-3)^2 \geq 0$, (실수$)^2 \geq 0$이므로
$\therefore$ ⑤ 모든실수

2. 두 점 A(1), B(5) 에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\frac{3\times5+1\times1}{3+1}=4$

$\therefore$ P(4)

$\frac{3\times5-1\times1}{3-1}=7$

$\therefore$ Q(7)

$\therefore \overline{PQ}=|7-4|=3$

3. 직선 $y=-x+1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

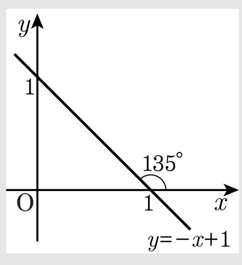
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

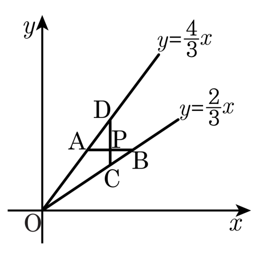
▷ 정답 : x 축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



4. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{8}{9}$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{9}{2}$
⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}\cdot\overline{\mathrm{DP}}}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{DP}}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{CP}}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

5. 직선 $x+ay+3=0$이 $2x-3y-5=0$에 평행하도록 상수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $-\frac{2}{3}$　⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

두 직선 $x+ay+3=0,\ 2x-3y-5=0$이 평행

$\frac{2}{1}=\frac{-3}{a}\neq\frac{-5}{3}$, 즉 $\frac{2}{1}=\frac{-3}{a}$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$

6. 직선 $y = 2x - 5$ 를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 5$ 와 일치하였다. 이때, a, b 사이의 관계식은?

① $2a - b = 5$ ② $2a - b = -10$ ③ $2a + b = 5$
④ $2a + b = 10$ ⑤ $2a - b = 10$

해설

$y = 2x - 5$, x 축 방향으로 a , y 축 방향으로 b 만큼 이동시키면,
$y - b = 2(x - a) - 5$
$\Rightarrow \quad y = 2x - 2a + b - 5$
$\therefore \quad -2a + b - 5 = 5$
$\Rightarrow \quad 2a - b = -10$

7. 직선 $2x-y+3=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+3=0$ ② $2x-y-3=0$ ③ $2x+y-3=0$
④ $x-2y-3=0$ ⑤ $x-2y+3=0$

해설
원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

8. 좌표평면 위의 점 $(-1,\ 3)$ 을 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3,\ 5)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1,3),(3,5)$ 의 중점이 (a,b) 이다.

$\Rightarrow \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right) = (a,b)$

$\Rightarrow a+b=5$

9. 둘레의 길이가 24 cm 인 직사각형의 넓이를 $35\,\text{cm}^2$ 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 cm ② 10 cm ③ 12 cm ④ 15 cm ⑤ 19 cm

해설

한 변의 길이가 a 이므로 다른 한 변의 길이는 $12 - a$ 이다.
$a(12 - a) \geq 35$ 에서 $(a - 5)(a - 7) \leq 0$
$\therefore\ 5 \leq a \leq 7$
따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 12 cm

10. 이차함수 $y = x^2 - 2x$ 의 그래프가 직선 $y = a$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < b$ 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2 - 2x < a$ 에서 $x^2 - 2x - a < 0 \cdots$ ㉠
한편, 해가 $-1 < x < b$ 이고
이차항의 계수가 1 인 이차부등식은
$(x+1)(x-b) < 0$
$\therefore x^2 + (1-b)x - b < 0$ 이
부등식 ㉠과 일치해야 하므로
$1 - b = -2$, $a = b$
따라서 $a = 3$, $b = 3$ 이므로 $ab = 9$

11. 이차함수 $y=x^2-2x-3$ 의 그래프가 이차함수 $y=2x^2-2mx+1$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $-3<m<3$
② $-3\ m<1$
③ $-1<m<3$
④ $m<-1$또는$m>1$
⑤ $m<-1$또는$m>3$

해설

$x^2-2x-3<2x^2-2mx+1$ 에서
$x^2-2(m-1)x+4>0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(m-1)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4<0$ 에서
$(m+1)(m-3)<0$
$\therefore -1<m<3$

12. $n,\ n+5,\ n+8$ 이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되는 자연수 n 의 개수는?

① 4　　② 6　　③ 7
④ 9　　⑤ 무수히 많다.

해설

삼각형의 결정조건에서
$n+(n+5)>n+8,\ n>3\cdots\cdots$㉠
둔각삼각형일 조건에서 $n^2+(n+5)^2<(n+8)^2$
$n^2-6n-39<0$, $3-\sqrt{48}<n<3+\sqrt{48}\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 자연수인 n 은
$n=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (6 개)

13. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0, \quad 1 - a + 9 > 0, \quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ \ a \ge 6,\ a \le -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

14. 이차방정식 $x^2+ax-2=0$ 의 두 실근 α, β에 대하여 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-\frac{13}{3}<a<-1$ ② $-\frac{10}{3}<a<0$ ③ $-\frac{7}{3}<a<1$
④ $-\frac{5}{3}<a<2$ ⑤ $-\frac{2}{3}<a<3$

해설

$f(x)=x^2+ax-2$ 로 놓으면 $-2<\alpha<0,\ 1<\beta<3$ 이므로
$f(-2)>0,\ f(0)<0,\ f(1)<0,\ f(3)>0$ 이어야 한다.
$f(-2)=-2a+2>0$ 에서 $a<1$
$f(0)=-2<0$
$f(1)=a-1<0$ 에서 $a<1$
$f(3)=3a+7>0$ 에서 $a>-\frac{7}{3}$
$\therefore\ -\frac{7}{3}<a<1$

15. 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ -1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\frac{3-(-1)}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

16. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$은 k의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　② $(1,\ 0)$　③ $(3,\ 1)$
④ $(-1,\ -3)$　⑤ $(3,\ 0)$

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k에 대하여
정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$
이 식이 k에 값에 관계없이 성립하려면
$3x+y-4=0,\ 5x-2y-3=0$
이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1,\ y=1$
즉, k의 값에 관계없이 점$(1,\ 1)$을 지난다.

17. 두 직선 $x+y-1=0$, $2x-y+7=0$ 의 교점을 지나고 원점에서의 거리가 2 인 직선의 방정식의 기울기는?

① $\frac{5}{8}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

먼저 두 직선의 교점을 구하면 $(-2,3)$
이 점을 지나는 직선의 방정식은
$y=m(x+2)+3$
원점과의 거리를 구하면,
$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=2$
$\Rightarrow \quad (2m+3)^2=4(m^2+1)$
$\Rightarrow \quad m=-\frac{5}{12} \quad \cdots$ 기울기

18. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

$P(x,\ y)$ 라 하면,
(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$
$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$
즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$
그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

19. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

20. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$
② $x^2+y^2=1$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
④ $(x+1)^2+y^2=2$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1 인 ②이다.

21. 함수 $f(x)=ax+b$가 $2 \le f(1) \le 4,\ 0 \le f(2) \le 3$을 만족할 때, $f(3)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(1)=a+b,\ f(2)=2a+b$
$f(3)=3a+b$이므로 $f(3)=2f(2)-f(1)$
조건에서 $2 \le f(1) \le 4 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$0 \le f(2) \le 3 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 각 변에 -1을 곱하면
$-4 \le -f(1) \le -2 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 각 변에 2를 곱하면
$0 \le 2f(2) \le 6 \quad \cdots\cdots$ ㉣
$\therefore\ -4 \le f(3) \le 4$
따라서, $f(3)$의 최댓값은 4 , 최솟값은 -4 이다.

22. 8% 의 소금물 200 g 이 있다. 여기에 x g 의 소금을 섞어서 10% 이상 20% 미만의 농도를 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{40}{9} \le x < 30$

해설

8% 의 소금물 200 g 의 소금의 양은

$\frac{8}{100} \times 200 = 16\,(\mathrm{g})$ 이다.

따라서 소금 x g 을 추가하였을 때의 농도를 나타내면 $\frac{16+x}{200+x} \times 100$ 이다.

이 값이 10% 이상 20% 미만이므로,

$10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 \\ \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \ge \frac{40}{9} \\ x < 34 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $\frac{40}{9} \le x < 30$ 이다.

23. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+2xy+2x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=1,\quad b>2$　② $a=1,\quad b<2$　③ $a=2,\quad b>1$
④ $a=2,\quad b\geq 1$　⑤ $a=2,\quad b\leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2(1+y)x+y^2+ay+b>0$ 이고
임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는
$D/4<0$를 만족해야 한다.
$D/4=(1+y)^2-(y^2+ay+b)<0$
$\therefore (2-a)y+1-b<0\cdots$①
①식이 모든 실수 y에 성립할 조건은
$(2-a)=0,\quad 1-b<0,$
$\therefore a=2,\quad b>1$

24. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$을 만족하는 x의 범위가 $-2<x<1$일 때, 부등식 $cx^2-ax+b<0$을 만족하는 x의 범위는?

① $-2<x<1$　② $-1<x<\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}<x<2$
④ $\frac{1}{2}<x<1$　⑤ $\frac{1}{2}<x<2$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$이므로

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(a<0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=x^2+x-2<0$

$\therefore\ \frac{b}{a}=1, \frac{c}{a}=-2$

$cx^2-ax+b<0$에서

양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-x+\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow -2x^2-x+1>0$

$2x^2+x-1<0, (2x-1)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<\frac{1}{2}$

25. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(2,2)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 길이를 구하면?

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ 5

해설

$x+y=2$ 위에 있는 점 P 는

$(\alpha, -\alpha+2)$ 로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$\alpha^2 + (-\alpha-4)^2 = (\alpha-2)^2 + (-\alpha)^2$

$\alpha = -1$

$\mathrm{P}(-1,\ 3)$

$\therefore\ \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

26. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

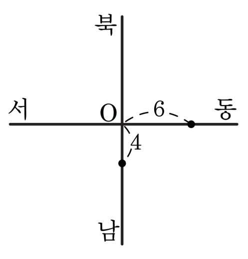
1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
$\therefore\ a = 2$

$a = -3$이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은
$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

27. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후

④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 t 시간 후의 A, B 의 좌표는 A($6-4t$, 0), B($0, -4+2t$) 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2 - 64t + 52} = \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52} = \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$ 이므로 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

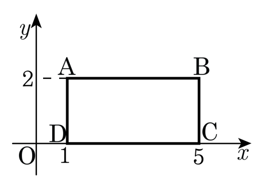
28. 네 점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{B}(3,\mathrm{a})$, $\mathrm{C}(\mathrm{b},4)$, $\mathrm{D}(2,8)$을 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되도록 하는 a,b 의 합을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

□ABCD가 마름모이므로
$\overline{\mathrm{AD}} /\!/ \overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$이다.
따라서 점 D는 점 A를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ (3+4,\ a+5) = (b,\ 4)$
$\therefore\ a = -1,\ b = 7$
$\therefore\ a + b = 6$

29. 점 $(-1,-1)$ 을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax+by+1=0$ 일 때, $a-b$ 의 값은?



① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1,-1)$ 을 지나므로, $-a-b+1=0 \cdots$ ㉠
그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심 $\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{0+2}{2}\right)$를 지나야 한다.
$\Rightarrow \quad 3a+b+1=0 \quad \cdots$ ㉡
㉠과 ㉡을 연립하면, $a=-1, \quad b=2$
$\therefore \quad a-b=-3$

30. 세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 10　　② 15　　③ 20　　④ 25　　⑤ 30

해설

$2x-y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠
$3x-4y+9=0 \cdots\cdots$ ㉡
$4x+3y+12=0 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5,\ y=6$
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=-4$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3,\ y=0$
세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 이루어지는
삼각형은 세 점 $A(5,\ 6)$, $B(0,-4)$, $C(-3,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.
따라서 점 $(5,\ 6)$ 과 직선 $4x+3y+12=0$
사이의 거리는 $\frac{|4\times 5+3\times 6+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|50|}{5}=10$
또, $\overline{BC}=\sqrt{(-3-0)^2+(0+4)^2}=5$
따라서 $\triangle$ABC 의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 5\times 10=25$

31. 점 $(1,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$

따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

32. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=5$

해설

$x+2y-3=0 \Rightarrow x-2y-3=0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y-2x-3=0$ ($y=x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore \ a-2-3=0 \quad \therefore \ a=5$

33. 두 점 $\mathrm{A}(-3,6)$, $\mathrm{B}(8,-1)$와 직선 $x+y+1=0$이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\mathrm{A}(-3,6)$ 의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(a,b)$라 하면

$\dfrac{a-3}{2}+\dfrac{b+6}{2}+1=0,\ a+b=-5 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AA}'}\perp l$이므로, $\overline{\mathrm{AA}'}$의 기울기는 1이다.

$\dfrac{b-6}{a+3}=1,\ a-b=-9 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ : $2a=-14,\ a=-7,\ b=2$

$\therefore\ \mathrm{A}'(-7,2)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\le\overline{\mathrm{A'B}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이고,

이 때 점 P는 A′, B 와 일직선상에 있으므로,

$\overline{\mathrm{A'B}}$의 기울기는 $\overline{\mathrm{BP}}$의 기울기와 같다.

$\mathrm{A}'(-7,2)$, $\mathrm{B}(8,-1)$, $\mathrm{P}(m,n)$에서

$\dfrac{-1-2}{8-(-7)}=\dfrac{n+1}{m-8}$,

$m+5n=3 \cdots$ ㉢

점 P는 직선 l위에 있으므로, $m+n=-1 \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $m=-2,\ n=1$

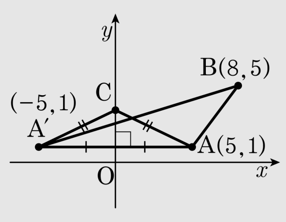
$\therefore\ \mathrm{P}(-2,1)$

34. 좌표평면 위의 두 점 A$(5,1)$, B$(8,5)$ 와 y 축 위의 점 C 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC 의 둘레의 길이의 최솟값이 $5+\sqrt{a}$ 일 때, a 의 값은?

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200

해설

점 A$(5,1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$ 이라하면 A$'(-5,1)$



또, 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{A'C}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$

$=\sqrt{(8-5)^2+(5-1)^2}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{A'C}}$

$\geq 5+\overline{\mathrm{A'B}}$

$=5+\sqrt{\{8-(-5)\}^2+(5-1)^2}$

$=5+\sqrt{185}$

$\therefore a=185$

35. 자동차 판매회사에 다니는 차세일씨는 기본 연봉 1000 만원에 연간 자동차 판매 금액의 일정 비율을 추가로 지급받기로 하였다. 한 대당 가격이 1000 만원인 자동차를 4 대, 한 대당 가격이 2000 만원인 자동차를 3대 판매할 것으로 예상되고 차세일씨가 연간 받고자 하는 급여의 총액이 1500 만원 이상이라고 할 때 연간 자동차 판매 금액의 최소 몇 % 를 추가로 지급해 달라고 요구해야 하는지 구하여라.(단, 세금은 계산하지 않는다.)

▶ 답 : ______ %

▷ 정답 : 5 %

해설

판매 금액의 일정 비율을 x% 라 하면

$$1000 + (1000 \times 4 + 2000 \times 3) \times \frac{x}{100} \geq 1500$$

$\therefore\ x \geq 5$

따라서 차세일씨는 자동차 판매금액의 최소 5% 를 추가로 지급해 달라고 요구해야 한다.

36. 사과를 한 상자에 50 개씩 넣으면 마지막 상자에는 38 개의 사과가 들어간다. 그런데 60 개의 사과가 썩어버려서 버리고, 한 상자에 44 개씩 넣으면 상자가 부족하고, 한 상자에 45 개씩 넣으면 마지막 한 상자만 가득 차지 않을 때, 상자의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 13 개

▷ 정답 : 14 개

해설

상자의 갯수를 x 개라 하면, 사과의 갯수는 $50(x-1)+38 = 50x-12$(개) 이다.
그런데 60 개를 버렸으므로

$50x-12-60 = 50x-72$

$44x < 50x-72 < 45x$

$\therefore 12 < x < 14.4$

따라서 상자의 갯수는 13 개, 14 개이다.

37. 6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 중 5 개의 무게는 같고, 나머지 1 개의 무게는 다르다. A, B 의 무게의 합은 C, D 의 무게의 합보다 작고, B, C 의 무게의 합은 E, F 의 무게의 합보다 작을 때, 무게가 다른 구슬을 찾아라.

▶ 답 :

▷ 정답 : B

해설

6 개의 구슬 A, B, C, D, E, F 의 무게를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하면

$a + b < c + d \cdots$ ㉠

$b + c < e + f \cdots$ ㉡

㉠ 에서 A, B, C, D 구슬 중 무게가 다른 것이 있으므로 E, F 의 구슬의 무게는 같다. 마찬가지 방법으로 ㉡ 에서 A, D 구슬의 무게는 같다.

따라서 ㉠ 에서 $b < c$ 이므로 ㉡ 에서 $b + c < e + f$ 인 것은 구슬 B 의 무게 때문이다.

즉, B 구슬의 무게가 다른 구슬들과 다르다.

38. 이차방정식 $ax^2 - (a-3)x + a - 2 = 0$이 적어도 한 개의 정수근을 갖도록 하는 정수 a값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

이차방정식이므로 $a \neq 0$이고

실근을 가지므로

$D = (a-3)^2 - 4a(a-2) \geq 0$

$3a^2 - 2a - 9 \leq 0$

$\therefore \ \frac{1-\sqrt{28}}{3} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{28}}{3}$

$-1.\times\times\cdots \leq a \leq 2.\times\times\cdots$ 이므로

a의 정수값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$

그런데 $a \neq 0$이고 $a = 1$일 때는 정수근이 없다.

$\therefore \ a = -1,\ 2$이고 구하는 합은 1

39. x에 대한 방정식 $x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을 α,β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2 \le 8$를 만족하는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M,m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^2-2kx+(2k^2-3k)=0$의 두 실근을
α,β라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-3k)\ge 0$
$\therefore\ 0\le k\le 3\cdots$①
또, $\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k^2-k$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\le 8$
$(2k)^2-4(2k^2-3k)\le 8$
$k^2-3k+2\ge 0 \quad (k-1)(k-2)\ge 0$
$\therefore\ k\le 1,\quad k\ge 2\cdots$②
①,②에서 $0\le k\le 1$ 또는 $2\le k\le 3$
$\therefore\ M=3,\quad m=0$
$\therefore\ M+m=3$

40. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

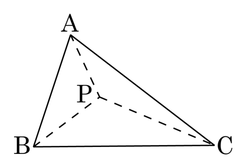
㈎ $b^2 - 4ac > 0$	㈏ $a + c < b$
㈐ $a < 1$ 이고 $b < c$	

① ㈎　　② ㈎, ㈏　　③ ㈎, ㈐
④ ㈏　　⑤ ㈎, ㈏, ㈐

해설

㈎두 식의 판별식 값이 모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D < 0$이어야 해가 존재하므로 옳다.
㈏ 주어진 식에 1을 대입하면 성립한다.
㈐, ㈏에 의해 $c < b$

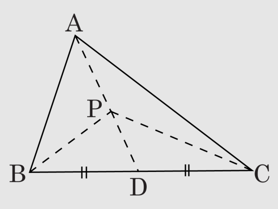
41. 다음 그림과 같이 $\triangle$ABC 의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P 를 잡았더니 $\overline{\mathrm{AP}} = 4$, $\overline{\mathrm{BP}} = 3$, $\overline{\mathrm{CP}} = 5$ 가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC 의 길이는?



① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle$ABC 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P 는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 연장선과 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 교점을 D 라 하면



$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PD}} = 2 : 1$

$\therefore \overline{\mathrm{PD}} = 2$

$\triangle$PBC 에서 중선 정리를 이용하면

$\overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2 = 2\left(\overline{\mathrm{PD}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2\right)$

$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2\right)$

$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2 \cdot \overline{\mathrm{BD}} = 2\sqrt{13}$

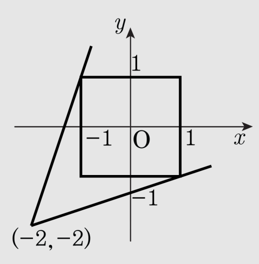
42. $|x+y|+|x-y|=2,\ kx-y+2k-2=0$을 동시에 만족하는 실수 $x,\ y$가 존재할 때, 실수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면, $M+m$의 값은?

① 3　　② $\frac{10}{3}$　　③ $\frac{11}{3}$　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|x+y|+|x-y|=2$ 을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다. 한편, $kx-y+2k-2=0$ 은 k 에 관하여 정리하면

$k(x+2)-(y+2)=0$ 이므로 k 의 값에 관계없이 항상 $(-2,-2)$ 를 지나는 직선이다.



두 도형을 동시에 만족하는 실수 $x,\ y$ 가 존재해야 하므로 두 그래프가 만나야 한다.

따라서 k 는 이 직선의 기울기 이므로

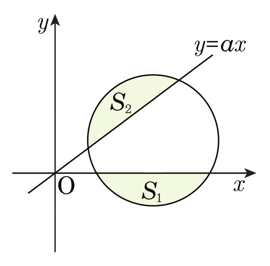
직선이 점$(-1,1)$ 을 지날 때, k 는 최대이고

점 $(1,-1)$ 을 지날 때 k 는 최소이다.

$M=3,\ m=\frac{1}{3}$

$\therefore M+m=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

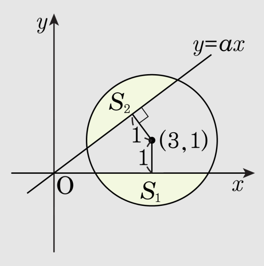
43. 아래 그림에서 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 와 x 축으로둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1=S_2$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

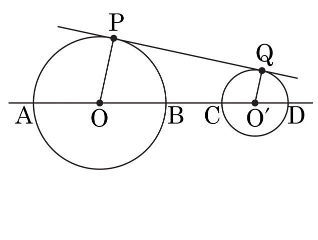


$S_1=S_2$ 이면, 중심 $(3,1)$ 에서 직선 $y=ax$ 까지 거리는 1 이다.

따라서 $1=\dfrac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$ 이고 $a=\dfrac{3}{4}$ 이다.

$\therefore\ 100a=75$

44. 다음 그림과 같이 두 개의 원과 두 원의 중점 O, O′ 을 지나는 직선과의 교점을 A, B, C, D 라 하고, 1 개의 공통외접선이 두 원에 접하는 점을 P, Q 라 하자. $\overline{\mathrm{OO'}} = p$, $\overline{\mathrm{PQ}} = q$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}}$ 와 $\overline{\mathrm{BD}}$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은?



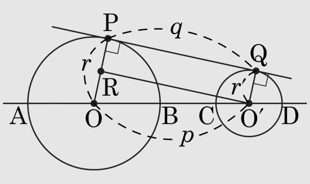
① $x^2 + 2px + q^2 = 0$　　② $x^2 - 2px + q^2 = 0$

③ $x^2 - px + q = 0$　　④ $x^2 - p^2x + q^2 = 0$

⑤ $x^2 - px + q^2 = 0$

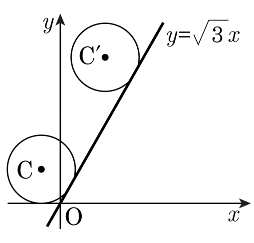
해설

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}} = r$, $\overline{\mathrm{O'Q}} = r'$ 라 하고
점 O′ 에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 와 평행한 직선과 $\overline{\mathrm{OP}}$ 와의 교점을 R 이라 하자.



$\overline{\mathrm{OR}} = r - r'$, $\overline{\mathrm{AC}} = p + r - r'$,
$\overline{\mathrm{BD}} = p - r + r'$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{BD}} = 2p$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}} \cdot \overline{\mathrm{BD}} = p^2 - (r - r')^2 = \overline{\mathrm{O'R}}^2 = q^2$
따라서 $x^2 - 2px + q^2 = 0$

45. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 C : $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y-1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?



① $\frac{3+\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}+1)\pi$　② $\frac{3-\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}-1)\pi$
③ $\frac{3+\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$　④ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$
⑤ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{b-1}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ 에서

$b = \sqrt{3}a + 2$

ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.

$\Rightarrow \quad (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b-1)^2 = 16\pi^2$

i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,

$4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$

$3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{3}a+1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$

$\Rightarrow \quad a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}}$ ($\because a > 0$)

$\Rightarrow \quad b = 2\sqrt{3}\pi + 1$

$\therefore \quad a+b = \frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$