1. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　② $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　③ $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1　⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2) = 0$

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

2. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=a \\ x-ay=1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a=-1$

② $a=1$

③ $a=\pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore$ $a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

3. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

4. $y=x^2-(a^2-4a+3)x+a^2+2$ 와 $y=x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4　② 2　③ -4　④ -2　⑤ 3

해설

$y=x^2-(a^2-4a+3)x+a^2+2$

$y=x$ 의 교점은 $x^2-(a^2-4a+3)x+a^2+2=x$

$x^2-(a^2-4a+4)x+a^2+2=0$ 의 두 근을 α, β 라면

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$$\therefore \ \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{(a-2)^2}{2}=0$$

$\therefore \ a=2$

5. 둘레의 길이가 $24\,\text{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

반지름 $x\,\text{cm}$, 호의 길이를 $(24-2x)\,\text{cm}$ 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 $6\,\text{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\text{cm}^2$ 를 가진다.
따라서 호의 길이는 $24-2x=12\,\text{cm}$ 이다.

6. 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$　　② 0　　③ i　　④ 1　　⑤ -1

해설

$x=i$를 대입하면 $(i)^3+ai+b=0$ $(a-1)i+b=0$

$a,\ b$는 실수이므로 $a=1,\ \ b=0$

$x^3+x=0,\ x(x^2+1)=0,\ \ x=0,\ i,\ \ -i$

$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$=0$

7. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, x^{51}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$에서

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$

$\therefore x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1$

$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

8. 다음은 α가 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$의 한 근일 때, $\alpha^2 - 2$도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

> α 는 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이므로 (가)
> $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이라고 하면
> $f(\alpha^2 - 2) =$ (나) $=$ (다) $=$ (라) $=$ (마) $= 0$
> 따라서, $\alpha^2 - 2$ 도 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이다.

① (가) $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$

② (나) $(\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1$

③ (다) $\alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1$

④ (라) $(\alpha^3 - 3\alpha + 1)(\alpha^3 - 3\alpha - 1)$

⑤ (마) $0 \cdot 2$

해설

α는 $x^3 - 3x + 1 = 0$의 근이므로 $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$이라고 하면 $f(\alpha^2 - 2) = (\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1$

$= \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1 = (\alpha^3 - 3\alpha + 1)(\alpha^3 - 3\alpha - 1) = 0 \cdot (-2) = 0$

따라서 $\alpha^2 - 2$도 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$의 근이다.

9. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5},\ y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}$

③ $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x+2y) = 0$

i) $x = y$일 때

$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\quad x = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x = -2y$일 때

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5,\ y = \pm\sqrt{5},\ x = \mp 2\sqrt{5}$ (복호동순)

$\therefore$ 구하는 해는 $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$,

$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$, $(2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

10. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면

$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로

$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$

$(2-k)\alpha+(k-2)=0$

따라서 $\alpha=1$ 이고

$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

11. $2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$

$= 2x^2 - (3y + 3)x + my^2 + y + 1$

이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$D = (3y + 3)^2 - 8(my^2 + y + 1)$

$\quad = 9y^2 + 18y + 9 - 8my^2 - 8y - 8$

$\quad = (9 - 8m)y^2 + 10y + 1$

여기서 $D/4 = 25 - (9 - 8m) = 0$ 이어야 하므로

$25 - 9 + 8m = 0$

$8m = -16$

$\therefore m = -2$

12. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 (x, y)가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2 \neq 0$

$\therefore k \neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$$

$$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$$

$$-k+11>0$$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<11,\ k \neq 2$

따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

13. $x=-3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 할 때, 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

$y=a(x+3)^2+4$
$=a(x^2+6x+9)+4$
$=ax^2+6ax+9a+4$

$9a+4=2,\ 9a=-2$ 이므로 $a=-\frac{2}{9}$

$y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x+2$

$\therefore abc=\left(-\frac{2}{9}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times 2=\frac{16}{27}$

14. 두 함수 $f(x)=|x-2|-5$, $g(x)=x^2+6x+8$ 에 대하여 $0\le x\le 5$ 에서 $y=g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)=|x-2|-5=t$ 로 놓으면

$y=g(f(x))=g(t)=t^2+6t+8=(t+3)^2-1$

그런데 $0\le x\le 5$ 에서 $-5\le t\le -2$ 이므로

y 의 값은 $t=-5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,

$t=-3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.

$\therefore M=3,\ m=-1$

$\therefore M+m=2$

15. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x\%$ 감소한다고 한다. 이 때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.
가격을 $x\%$ 올리면 상품 1개당 판매 가격이
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$개이므로
판매 금액은

$$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)$$
$$=ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300}$$
$$=\frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x)$$
$$=\frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000)$$
$$=\frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\}$$

따라서 $x=25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

16. 사차방정식 $x^4+5x^3+ax^2+bx-5=0$이 $x=-1+\sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x=-1+\sqrt{2}$에서 $x+1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$

$\therefore x^4+5x^3+ax^2+bx-5=(x^2+2x-1)(x^2+cx+5)$

$=x^4+(2+c)x^3+(4+2c)x^2+(10-c)x-5$

$\therefore\ 2+c=5,\ 4+2c=a,\ 10-c=b$

$\therefore\ a=10,\ b=7,\ c=3$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=10 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=24 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

① ± 2　② ± 4　③ ± 8　④ ± 16　⑤ ± 32

해설

$$\begin{cases} x(y+z)=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ y(z+x)=18 & \cdots\cdots ㉡ \\ z(x+y)=24 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $2(xy+yz+zx)=52$

$\therefore\ xy+yz+zx=26$

$\therefore\ xy=2,\ yz=16,\ zx=8$ ⋯⋯ ㉣

㉣에서 $(xyz)^2=16^2$　$\therefore\ xyz=\pm 16$

$\therefore\ x=\alpha=\pm 1,\ y=\beta=\pm 2,\ z=\gamma=\pm 8$ (복부호동순)

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\pm 16$

18. 다음 x에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2-2x+a^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-ax+2a=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 에서 공통근이 오직 한 개일 때, a의 값과 공통근 k를 구하면?(단, a는 실수)

① $a=0$일 때 $k=0$, $a=-1$일 때, $k=1$

② $a=2$일 때 $k=1\pm\sqrt{3}i$

③ $a=1$일 때 $k=1$, $a=2$일 때, $k=1$

④ $a=3$일 때 $k=2\pm\sqrt{3}$

⑤ $a=2$일 때 $k=-1$, $a=3$일 때, $k=1$

해설

공통근을 $x=k$라 하면

$k^2-2k+a^2=0 \quad \cdots ①$

$k^2-ka+2a=0 \quad \cdots ②$

두 식을 빼주면, $(k+a)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $k=-a$

ⅰ) $a=2$일 때

㉠, ㉡이 같아지므로 성립하지 않는다.

ⅱ) $k=-a$일 때

①에 넣으면 $a=0$ 또는 $a=-1$

$\begin{cases} a=0 \text{ 이면 } k=0 \\ a=-1 \text{ 이면 } k=1 \end{cases}$

19. x 에 대한 이차방정식 $x^2-kx+k+3=0$ 의 두 근이 모두 정수 일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$x^2-kx+k+3=0$ 의 두 근을 α,β 라 하자

$\alpha+\beta=k, \alpha\beta=k+3 \rightarrow \ \alpha+\beta+3=\alpha\beta$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=3$

$(\alpha-1)(\beta-1)=4$ α,β 는 정수이므로

$1\times 4 \Rightarrow \alpha=2,\ \beta=5, \quad k=7$

$2\times 2 \Rightarrow \alpha=3,\beta=3, \quad k=6$

$-1\times -4 \Rightarrow \alpha=0,\beta=-3, \quad k=-3$

$-2\times -2 \Rightarrow \alpha=-1,\beta=-1, \quad k=-2$

$\therefore\ 7+6-3-2=8$

20. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $< x >$로 나타낼 때, 방정식 $[x]+< x >=7$의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$ ② $3 \leq x \leq 4$ ③ $3 \leq x < 4$
④ $3 < x \leq 4$ ⑤ $3 < x < 4$

해설

x가 정수 k일 때,
$[x]=< x >=k$
$k< x < k+1$일 때,
$[x]=k,\ < x >=k+1$
따라서 $[x]+< x >=7$이고
$[x],< x >$는 정수이므로
$[x]=3,\quad < x >=4\ (\because\ \ [x]\leq < x >)$
$\therefore\ \ 3< x <4$

21. x에 관한 삼차방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-\gamma^3)$의 값은?

① 4　　② 2　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

$x^3+x^2+x+1=0$에서 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=-1$

또한 $x^3+x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$를 곱하면

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=0,\quad x^4=1$

$\therefore \alpha^4=\beta^4=\gamma^4=1,\quad \alpha^3=\frac{1}{\alpha}, \beta^3=\frac{1}{\beta}, \gamma^3=\frac{1}{\gamma}$

$\therefore$(준식)$=(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{1}{\beta})(1-\frac{1}{\gamma})=1-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha})-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$=1-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1+1+1+1=4$

해설

$x^3+x^2+x+1=0$을 인수분해 하면 $(x+1)(x^2+1)=0$

그러므로 $\alpha=-1, \beta=i, r=-i$라 놓을 수 있다.(순서를 바꾸어도 상관 없으므로)

$(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-r^3)=(1+1)(1+i)(1-i)$

$=2(1+1)=4$

22. 연립방정식 $x^2+y^2=5(xy-1)=10xy-5(x+y)$ 의 해를 꼭지점으로 하는 도형의 넓이를 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$(x+y)^2-2xy=5(xy-1)=10xy-5(x+y)$ 에서

$x+y=u,\ xy=v$ 라 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=5(v-1) \\ 5(v-1)=10v-5u \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} u^2=7v-5 \\ v=u-1 \end{cases}$ 을 풀면

$\therefore \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ㉠

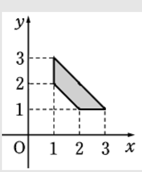
$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 근이므로

$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

㉡의 $x,\ y$ 는 $t^2-4t+3=0$ 의 근이므로

$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$



구하는 도형은 그림의 사각형이다.

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$