1. 실수 a는 $0 < a < \frac{1}{2}$을 만족할 때, 다음 중 가장 큰 수를 구하시오.

① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\frac{1}{1-a}$ ⑤ $\frac{a}{1+a}$

해설

주어진 a 값의 범위를 이용하여 보기식의 값의 범위를 알아낸다.

③ $\frac{1}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0}$, $2 < \frac{1}{a}$

④ $-\frac{1}{2} < -a < 0$, $\frac{1}{2} < 1-a < 1$

$1 < \frac{1}{1-a} < 2$

⑤(주어진 식)$=\frac{1+a-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$에서

$1 < 1+a < \frac{3}{2}$

$\frac{2}{3} < \frac{1}{1+a} < 1$

$0 < 1 - \frac{1}{1+a} < \frac{1}{3}$

2. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x-1>m(x-1)$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m^2x-1>m(x-1)$에서

$m^{2x}-1>mx-m$

$\therefore (m^2-m)x>1-m \cdots$ ㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2-m=0,\ 1-m\geq 0$

$m^2-m=0$에서 $m(m-1)-0$

$\therefore m=0$ 또는 $1\cdots$ ㉡

$1-m\geq 0$에서 $m\leq 1\cdots$ ㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m=0$ 또는 $m=1$

3. 두 부등식 $10-3x>4$, $2x+1>-3$을 동시에 만족하는 해가 $a<x<b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$i)10-3x>4$

$\Rightarrow x<2$

$ii)$ $2x+1>-3$

$\Rightarrow x>-2$

부등식의 해의 범위가 $-2<x<2$ 이므로,

$a+b=(-2)+2=0$ 이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 4(2-x) \le 5 \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} > 1 \\ 2x - 3 \le 5 \end{cases}$ 을 풀면?

① $\frac{3}{4} < x \le 4$ ② $1 < x \le 4$ ③ $\frac{3}{4} \le x < 1$

④ $\frac{3}{4} \le x < 4$ ⑤ $1 \le x < 4$

해설

$$\begin{cases} 4(2-x) \le 5 \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} > 1 \\ 2x - 3 \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ x > 1 \\ x \le 4 \end{cases}$$

$\therefore\ 1 < x \le 4$

5. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \leq 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \leq k \leq 0$

② $-2 < k < 0$

③ $0 \leq x \leq 2$

④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0$, 또는$k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0, \quad k(k-2) < 0$
$\therefore 0 < k < 2$

6. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2 - 6x + 1 \le 0$

② $x^2 - 2x - 3 < 0$

③ $x^2 - x + 1 > 0$

④ $x^2 - 6x + 9 > 0$

⑤ $4x^2 - 4x + 1 < 0$

해설

① $(x - \frac{3-\sqrt{7}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{7}}{2}) \le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

③ $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2 < 0 \Rightarrow$ 해는 없다

7. 다음 연립부등식의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x - 8 < 5x + 2 \\ 2x - 3 \leq x + a \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \leq -8$

해설

$3x - 5x < 2 + 8$

$-2x < 10$ 에서

$x > -5$

$2x - x \leq a + 3$ 에서

$x \leq a + 3$

$a + 3 \leq -5$ 이어야 해가 없다.

$\therefore\ a \leq -8$

8. 연속하는 세 자연수의 합이 66 보다 크고 70 보다 작을 때, 세 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

▷ 정답 : 23

▷ 정답 : 24

해설

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$로 각각 두면

$66 < (x-1)+x+(x+1) < 70$

$66 < 3x < 70$

$$\Rightarrow \begin{cases} 66 < 3x \\ 3x < 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 22 \\ x < \dfrac{70}{3} \end{cases}$$

따라서 $x = 23$ 이므로 세 수는 22, 23, 24 이다.

9. 다음 부등식을 풀어라.

$$|x-1|>|x-2|$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x>\dfrac{3}{2}$

해설

i) $x<1$일 때,
$-(x-1)>-(x-2)$에서 $1>2$이므로 모순

ii) $1\le x<2$일 때,
$(x-1)>-(x-2)$에서

$2x>3,\ x>\dfrac{3}{2}$

조건에서 $1\le x<2$이므로 $\dfrac{3}{2}<x<2\cdots$ ㉠

iii) $x\ge 2$일 때, $(x-1)>(x-2)$에서 $1<2$이므로 성립
$\therefore\ x\ge 2\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x>\dfrac{3}{2}$

10. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$

④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<2$

11. 부등식 $2[x]^2 - 9[x] + 9 < 0$ 을 만족하는 x의 값의 범위는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① $\frac{2}{3} < x < \frac{7}{2}$ ② $\frac{3}{2} < x \leq 3$ ③ $2 \leq x < 3$

④ $1 \leq x < 3$ ⑤ $1 \leq x \leq 4$

해설

$[x] = t$로 놓으면 $2t^2 - 9t + 9 < 0$이므로

부등식을 풀면 $(2t-3)(t-3) < 0$

$\therefore \frac{3}{2} < t < 3$

따라서, $\frac{3}{2} < [x] < 3$에서 $[x] = 2$

$\therefore 2 \leq x < 3$

12. 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2-(k-2)x+k+6}$가 실수가 되도록 하는 k 값의 범위는?

① $-10 \le k \le 10$ ② $-5 \le k \le 7$ ③ $-2 \le k \le 10$

④ $0 \le k \le 10$ ⑤ $5 \le k \le 12$

해설

$\sqrt{x^2-(k-2)x+k+6}$가 실수가 되려면,

$x^2-(k-2)x+k+6 \ge 0$를 만족해야 한다

$\Rightarrow$ 판별식의 값이 0보다 작거나 같다

$\Rightarrow$ $D' = (k-2)^2 - 4(k+6) \le 0$

$\Rightarrow$ $(k-10)(k+2) \le 0$

$\therefore$ $-2 \le k \le 10$

13. x에 관한 이차부등식 $x^2+ax+2a-3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 상수 a의 범위를 구하면 $p<a<q$이다. 이 때, pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq=12$

해설

$x^2+ax+2a-3>0$이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D<0$을 만족해야 한다.
$D=a^2-4(2a-3)<0$
$a^2-8a+12<0$
$(a-6)(a-2)<0$
$2<a<6 \quad \therefore p=2, q=6$
$\therefore \ pq=2\times 6=12$

14. 이차부등식 $x^2+ax+b<0$ 의 해가 $-2<x<3$ 일 때, 두 상수 $a,\ b$ 의 곱은?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

해설

해가 $-2<x<3$ 이고,
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+2)(x-3)<0$
$x^2-x-6<0$
$\therefore a=-1,\ b=-6$
$ab=6$

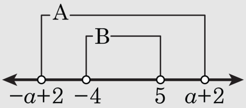
15. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x+1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \leq 3$　② $0 < a < 3$　③ $0 \leq a \leq 3$

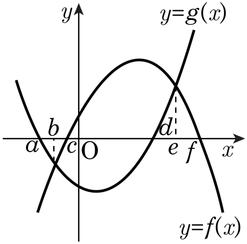
④ $a \geq 3$　⑤ $a \geq 6$

해설

$\therefore\ a \geq 6$



16. 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는?



① $a<x<c,\ d<x<f$

② $a<x<b,\ e<x<f$

③ $b<x<c,\ d<x<e$

④ $a<x<c,\ e<x<f$

⑤ $x<a,\ c<x<d,\ x>f$

해설

$f(x)g(x)>0$ 이면

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 x축보다 위쪽에 있거나 또는 모두 x축보다 아래쪽에 있어야 한다.

$\therefore a<x<c,\ d<x<f$

17. 이차함수 $y=x^2+x+1$ 의 그래프가 함수 $y=kx^2+kx-1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 \le k < 1$ ② $-2 < k \le 3$ ③ $-7 < k \le 1$

④ $1 < k \le 5$ ⑤ $1 \le k < 7$

해설

$x^2+x+1 > kx^2+kx-1$ 에서

$(k-1)x^2+(k-1)x-2<0$

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때

$-2<0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k-1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때

주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k-1<0$

$\therefore k<1 \cdots$ ㉠

한편, 이차방정식 $(k-1)x^2+(k-1)x-2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D=(k-1)^2+8(k-1)<0$ 에서

$(k+7)(k-1)<0$

$\therefore -7<k<1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-7<k<1$

(i), (ii) 에서 $-7<k\le 1$

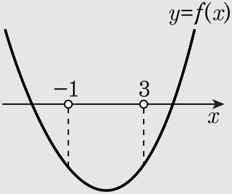
18. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x)=x^2+2(k-1)x+3k$ 라 하자.
$-1<x<3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1)\le 0,\ f(3)\le 0$이어야 한다.



(ⅰ) $f(-1)\le 0$ 에서 $(-1)^2+2(k-1)\cdot(-1)+3k\le 0,\ k+3\le 0$
$\therefore k\le -3$

(ⅱ) $f(3)\le 0$ 에서 $3^2+2(k-1)\cdot 3+3k\le 0,\ 9k+3\le 0$
$\therefore k\le -\dfrac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k\le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

19. x에 관한 부등식 $(a+2b)x+a-b<0$의 해가 $x>1$일 때, x에 관한 부등식 $(a-b)x+2a-b>0$을 풀면?

① $x>\frac{1}{3}$ ② $x<\frac{1}{3}$ ③ $x>-\frac{4}{3}$
④ $x<-\frac{4}{3}$ ⑤ $x>\frac{7}{3}$

해설

$a+2b<0,\ \dfrac{-(a-b)}{a+2b}=1$

$\therefore\ b=-2a$이므로

$(a-b)x+2a-b=a(3x+4)>0$

$a>0$을 이용하면

$\therefore\ 3x+4>0\ \ \therefore\ x>-\dfrac{4}{3}$

20. $A : 5(x+1) > 2x-1$, $B : \dfrac{x-4}{3} + \dfrac{3x+1}{2} > 1$ 에 대하여 A에서 B를 제외한 수들의 갯수는? (단, x는 정수)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A : x > -2$, $B : x > 1$ 이므로
A에서 B를 제외한 수는 $-1,\ 0,\ 1$
따라서 3개이다.

21. 연립부등식 $-3 < \dfrac{x+a}{2} \le 2$ 의 해가 $-7 < x \le b$ 일 때, $ax - b < 0$ 의 해를 구하면?

① $x < 1$ ② $x > 1$ ③ $1 < x < 3$

④ $x < 3$ ⑤ $x > 3$

해설

$-6 < x + a \le 4$ 와 $-7 < x \le b$와 같으므로 $-6 - a < x \le 4 - a$,

$a = 1,\ b = 3$

$ax - b = x - 3 < 0$

그러므로 $x < 3$ 이다.

22. 연립부등식 $\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases}$ 를 만족하는 정수가 3개만 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a < 4$ ② $4 < a < 7$ ③ $a \le 7$

④ $4 < a \le 7$ ⑤ $4 \le a \le 7$

해설

$$\begin{cases} -3x \le 2(1-x) \\ 4+x < -2x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < \dfrac{a-4}{3} \end{cases}$$

정수 x는 $-2, -1, 0$이므로 $0 < \dfrac{a-4}{3} \le 1$

$\therefore\ 4 < a \le 7$

23. 두 부등식 A : $\frac{5x+1}{6} < 1$, B : $3x-8 < -x$ 에 대하여 A에서 B를 제외한 부분을 만족하는 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

$A : \frac{5x+1}{6} < 1$

$\therefore x < 1$

$B : 3x-8 < -x$

$\therefore x < 2$

따라서 A에서 B를 제외한 부분을 만족하는 자연수의 개수는 0개이다.

24. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$　② $2 < a < 5$　③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$　⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$의 해가

1개 존재하기 위해서는

$x^2 + ax + a + 3 = 0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore D &= a^2 - 4(a+3) \\ &= a^2 - 4a - 12 \\ &= (a-6)(a+2) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore a = 6 \ (\because a > 0)$

25. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$　② $-1 \le x \le 1$　③ $x \ge 1$

④ 해는 없다.　⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2),\ x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2,\ x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

26. 모든 실수 x에 대하여 $(|a|+a)x \geq a^2+a-20$이 성립할 때, 정수 a의 개수를 구하면?

① 9 개　② 6 개　③ 5 개　④ 4 개　⑤ 3 개

해설

$(|a|+a)x \geq a^2+a-20$에서
a의 부호에 따라 범위를 나누면,
① $a<0 : |a|=-a$
$0\cdot x \geq a^2+a-20,\ (a+5)(a-4)\leq 0$에서
$-5\leq a\leq 4$
$\therefore\ -5\leq a<0$
② $a=0 : 0\cdot x \geq -20$이므로, 항상 성립한다.
$\therefore\ a=0$
③ $a>0 : |a|=a$
$2a\cdot x \geq a^2+a-20,\ x\geq \dfrac{1}{2a}(a^2+a-20)$
모든 x에 대해서 위 부등식이 성립할 수 없다.
$\therefore$ ①과 ②를 동시에 만족하는 a의 범위는$-5\leq a\leq 0$,
따라서 정수 a의 개수는 6 개

27. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $p<x<q$일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해를 p, q를 써서 나타내면? (단, $p>0$)

① $x>q$ 또는 $x<p$

② $\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}$

③ $x>\frac{1}{p}$

④ $x<\frac{1}{q}$

⑤ $x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $p<x<q$ 라면

$(a<0$ 이므로$)$ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$

$\Leftrightarrow (x-p)(x-q)<0$, $x-(p+q)x+pq<0$

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

$cx^2+bx+a<0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0$ $(\because a<0)$

$\Leftrightarrow pqx^2-(p+q)x+1>0$

$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1)>0$

$\therefore x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p}>\frac{1}{q}\right)$

28. 이차방정식 $(x-1)(x-3)+m(x-k)=0$이 모든 실수 m에 대하여 항상 서로 다른 두 실근을 가지도록 k의 값의 범위를 정하면?

① $0<k<1$ ② $1<k<3$ ③ $-1<k<1$

④ $-1<k<2$ ⑤ $-1<k<3$

해설

$x^2+(m-4)x+3-mk=0$은

서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=(m-4)^2-12+4mk>0$

이것을 정리하면

$m^2+4(k-2)m+4>0 \ \cdots(\text{i})$

(i)는 모든 실수 m에 대하여 성립해야 하므로

$4(k-2)^2-4<0$

$\therefore\ (k-1)(k-3)<0$

$\therefore\ 1<k<3$

29. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y=2(kx+1)$ 이 곡선 $y=-(x-2)^2+1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2+1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2+2(k-2)x+5>0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-5<0$$
$\Rightarrow\ k^2-4k-1<0$
$\therefore\ 2-\sqrt{5}<k<2+\sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

30. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2+px+1 > 2x+p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면
$-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은
$f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1,\ x = 1,\ x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때,
$f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \le -1,\ x \ge 3$

31. 모든 내각의 크기가 $180°$ 보다 작은 육각형의 각 변의 길이가 10, 2, 2, 1, $2x$, y 일 때, x^2+y^2 의 최솟값은? (단, x, y 는 자연수)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 13

해설

다각형의 결정조건에 의해 $2x+y>5$

x, y 는 자연수이므로,

$x=2$, $y=2$ 일 때 최소가 된다.

$\therefore x^2+y^2=8$

32. 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$ ② $1 \le a < 2$ ③ $2 \le a < 3$

④ $3 \le a < 4$ ⑤ $4 \le a < 5$

해설

$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$

i) $D/4=a^2-a-2 \ge 0,\quad a \le -1 \ or \ a \ge 2$

ii) $f(1)=1-2a+a+2>0 \quad \therefore a<3$

iii) 대칭축 $x=a>1$

i), ii), iii) 에서 $2 \le a < 3$

33. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

ⅰ), ⅱ)의 공통 범위 : $-2<a<2$

34. 실수 $a,\ b,\ c$와 $p,\ q,\ r$에 대하여 $a > b > c,\ p < q < r,\ p+q+r=0$이 성립할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $p < 0$ ② $q < 0$

③ $r > 0$ ④ $ap+bq+cr<0$

⑤ $p+q-r<0$

해설

$p<q<r$에서
$3p=p+p+p<p+q+r=0 \therefore\ p<0$
또한, $0=p+q+r<r+r+r=3r \therefore\ r>0$
$a>b,\ p<0$에서 $ap<bp$
$b>c,\ r>0$에서 $br>cr$
$\therefore\ ap+bq+cr<bp+bq+br=b(p+q+r)=0$
$p+q+r=0$에서 $p+q=-r$
$\therefore\ p+q-r=-2r<0$

35. 연립부등식 $x+2<4$ 와 $5x-8<17$ 의 해를 구하면?

① $x<2$　② $x>5$　③ $2<x\le 5$

④ $2\le x<5$　⑤ 해가 없다.

해설

$x+2<4$, $x<2$

$5x-8<17$, $x<5$

따라서 $x<2$

36. $a-2b-8 < (a+2b)x < 5a+4b+2$ 를 만족하는 x 의 범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 정수 a, b 에 대하여 $a\times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 부등식의 각 변을 $a+2b$ 로 나눌 때,

1) $a+2b>0$ 이면

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} < x < \frac{5a+4b+2}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 과 같으므로,

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} = -\frac{5}{2},\ \frac{5a+4b+2}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=5$ 이고 $a+2b>0$ 을 만족하고 정수이므로 적합하다.

2) $a+2b<0$ 이면

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} < x < \frac{a-2b-8}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 와 같으므로,

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} = -\frac{5}{2},\ \frac{a-2b-8}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{62}{33}$, $b=-\frac{59}{33}$ 이고 a, b 의 값은 정수가 아니므로 적합하지 않다.

따라서 $a=-2$, $b=5$ 이므로 $a\times b=-10$ 이다.

37. 유리수 a 에 대하여 $\{a\}$ 는 a 를 소수 첫째 자리에서 반올림한 수로 정의할 때, 부등식 $-2 < \left\{\dfrac{x+1}{3}\right\} < 3$ 을 만족하는 x 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-5.5 < x < 6.5$

해설

$-2 < \left\{\dfrac{x+1}{3}\right\} < 3$ 에서 $\left\{\dfrac{x+1}{3}\right\}$ 은 -2 보다 크고 3 보다 작은 정수이므로

$\left\{\dfrac{x+1}{3}\right\} = -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 이다.

따라서 $-1.5 < \dfrac{x+1}{3} < 2.5$, $-4.5 < x+1 < 7.5$ 이므로 $-5.5 < x < 6.5$

38. 세 자연수의 합이 20 이상 25 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $9:10:5$ 인 세 자연수를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 14

해설

세 자연수를 각각 $x,\ y,\ z$ 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $9:10:5$ 이므로

$x+y=9k$

$y+z=10k$

$z+x=5k$

각 변끼리 더하면 $x+y+z=12k$

따라서 $x=2k,\ y=7k,\ z=3k$

그런데 세 수의 합이 20 이상 25 이하이므로

$20 \le x+y+z \le 25$ 에서 $20 \le 12k \le 25$

$\therefore\ \dfrac{5}{3} \le k \le \dfrac{25}{12}$

k 는 자연수이므로 $k=2$

따라서 $x=4,\ y=14,\ z=6$

세 자연수는 $4,\ 6,\ 14$ 이다.

39. 커다란 상자 안에 600 개가 안 되는 파란 구슬과 빨간 구슬 개수가 3 : 5 의 비로 들어있다. 여기에 파란 구슬과 빨간 구슬을 x 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었고, 구슬은 총 개수는 650 개를 넘었다. 이 때 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

처음의 파란 구슬과 빨간 구슬의 수를 각각 $3y$ 개, $5y$ 개 라 하면 그 합이 600 개가 안 되므로

$3y + 5y < 600 \quad \therefore y < 75$

파란 구슬과 빨간 구슬을 x 개씩 집어넣었더니, 파란 구슬과 빨간 구슬의 개수의 비가 7 : 11 이 되었으므로

$(3y + x) : (5y + x) = 7 : 11 \quad \therefore y = 2x$

구슬이 650 개를 넘었으므로

$(3y + x) + (5y + x) > 650$

$8y + 2x > 650$ 에서 $9y > 650 \quad \therefore y > 72.\times\times\times$

$\therefore 72.\times\times\times < y < 75$

한편 $y = 2x$ 이므로 y 는 짝수이다.

따라서 $y = 74$ 이므로

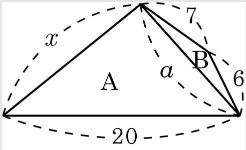
$\therefore x = 37$

40. 길이가 각각 6, 7, 20, x 인 선분을 끝점끼리 이어 붙여 볼록한 사각형을 만들 수 있는 x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $7 < x < 33$

해설



위의 그림과 같이 보조선을 그어 그 길이를 a 라 하자.

삼각형 B 에서 $a < 7 + 6$, 즉 $a < 13$

삼각형 A 에서

1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < a + 20$

그런데 $a < 13$ 이므로 $x < a + 20 < 13 + 20$

$\therefore\ x < 33$

2) 20 이 가장 긴 변인 경우 : $20 < a + x$

그런데 $a < 13$ 이므로 $20 < a + x < 13 + x$

$\therefore\ x > 7$

따라서 1), 2) 에 의해서 $7 < x < 33$ 이다.

41. 어느 실험실의 용기에 $100\,\mathrm{g}$ 의 소금물이 들어있다. 이 소금물의 농도는 현재 $5.5\,\%$ 이다. 실험실에 하고자 하는 실험을 위해서는 소금물의 농도가 $8 \sim 9\,\%$ 정도 유지되어야 한다고 한다. 이 수준을 유지하기 위해 최소 얼마만큼의 물을 증발시켜야 하는지 구하여라.

▶ 답 : ______ g

▷ 정답 : $31.25\,\mathrm{g}$

해설

5.5% 의 농도를 지닌 $100\,\mathrm{g}$ 의 소금물에 들어있는 소금의 양은

$100 \times \dfrac{5.5}{100} = 5.5\,\mathrm{g}$ 이다.

증발시켜야 하는 물의 양을 x 라 하면

농도를 $8 \sim 9\,\%$ 로 유지해야 하므로

$$8 \le \frac{5.5}{100 - x} \times 100 \le 9$$

$$\therefore 31.25 \le x \le \frac{350}{9}$$

따라서 최소 $31.25\,\mathrm{g}$ 의 물을 증발시켜야 한다.

42. 90 명이 넘는 사람들이 케이블카를 타려고 한다. 5 명씩 타면 7 명이 남고, 6 명씩 타면 케이블카가 1 개 남는다고 한다. 전체 인원 수를 구하여라.

① 91 명 ② 92 명 ③ 93 명 ④ 94 명 ⑤ 95 명

해설

케이블카의 대수를 x 대라고 하면, 전체 인원 수는 $(5x+7)$ 명이다.
하나의 케이블카에 6 명씩 타면 케이블카가 1 대 남으므로
사람이 타고 있는 케이블카의 수는 $(x-1)$ 개이고, 그 중 $(x-2)$ 개는 6 명씩 모두 들어가 있고, 나머지 하나의 케이블카에는 1 명 이상 6 명 이하가 들어가게 된다.
먼저 나머지 하나의 케이블카에 1 명이 들어간 경우를 식으로 표현하면, $6(x-2)+1$ 이고,
하나의 케이블카에 6 명이 들어간 경우를 식으로 표현하면, $6(x-2)+6$ 이다.
전체 인원 수는 이 두 가지 경우 사이에 존재하므로
$6(x-2)+1 \le 5x+7 \le 6(x-2)+6$ 이다.

이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 6(x-2)+1 \le 5x+7 \\ 5x+7 \le 6(x-2)+6 \end{cases}$ 이고

간단히 하면, $\begin{cases} x \le 18 \\ x \ge 13 \end{cases}$

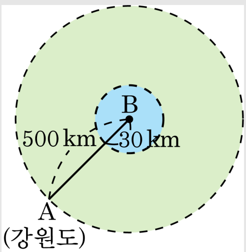
그러므로, x 의 범위는 $13 \le x \le 18$ 이다.
따라서 케이블카는 13, 14, 15, 16, 17, 18 대가 될 수 있다.
전체 인원 수는 (케이블카의 대수) × 5 + 7 이므로 72, 77, 82, 87, 92, 97, 102 명이다.
학생수는 90 명이 넘는다고 하였으므로 92, 97 명이 될 수 있다.

43. 강원도에서 북동쪽으로 500km 떨어진 해상에 태풍의 중심이 생성되었다. 이 태풍은 현재 중심에서 반지름의 길이가 30km 인 크기로 세력권이 형성되어 있으며 시속 20km 의 속도로 남서쪽으로 진행하고 있다. 태풍 세력권의 반지름의 길이가 매시 10km 씩 길어지고 있을 때, 강원도는 태풍의 세력권에 몇 시간 동안 들어가게 되는지 구하여라.

▶ 답 : ________ 시간

▷ 정답 : $\frac{112}{3}$ 시간

해설



다음 그림과 같이 강원도를 A, 태풍의 중심을 B 라고 하면 강원도가 t 시간 동안 세력권에 있을 조건은

$\overline{AB} \le$ (세력권의 반지름의 길이)

이 때, $\overline{AB} = |500 - 20t|$ 이므로

$|500 - 20t| \le 30 + 10t$

1) $500 - 20t \ge 0$ 일 때, 즉, $t \le 25$

$500 - 20t \le 30 + 10t,\ t \ge \frac{47}{3}$

$\therefore\ \frac{47}{3} \le t \le 25$

2) $500 - 20t < 0$ 일 때, 즉 $t > 25$

$-500 + 20t \le 30 + 10t,\ t \le 53$

$\therefore\ 25 < t \le 53$

1), 2) 에서 $\frac{47}{3} \le t \le 53$ 일 때 태풍의 세력권에 있으므로 $53 - \frac{47}{3} = \frac{112}{3}$ (시간) 동안 태풍의 세력권에 있다.

44. $a < b < c$ 일 때, $|x-a| < |x-b| < |x-c|$ 의 해를 구하면?

① $x < \frac{a+b}{2}$ ② $x > \frac{a+b}{2}$ ③ $x < \frac{b+c}{2}$
④ $x > \frac{b+c}{2}$ ⑤ $x < \frac{b-c}{2}$

해설

i) $|x-a| < |x-b|$에서 $(x-a)^2 < (x-b)^2$

$(b-a)(2x-a-b) < 0$, $b-a > 0$이므로

$x < \frac{a+b}{2}$

ii) $|x-b| < |x-c|$에서 $(x-b)^2 < (x-c)^2$

$(c-b)(2x-b-c) < 0$, $c-b > 0$이므로 $x < \frac{b+c}{2}$

i), ii)에서 $x < \frac{a+b}{2}$ $\left(\because \frac{a+b}{2} < \frac{b+c}{2}\right)$

45. 두 부등식 $x^2-15x+36<0$, $|8-x|\ge a$을 만족하는 정수의 개수가 3개일 때,
a의 값의 범위를 구하면?

① $1\le a\le 2$　② $2\le a<3$　③ $3\le a<4$
④ $2<a\le 3$　⑤ $3<a\le 4$

해설

$x^2-15x+36<0$에서
$(x-3)(x-12)<0$이므로 $3<x<12$
$|8-x|\ge a$에서
$8-x\ge a$ 또는 $8-x\le -a$
$\therefore x\le 8-a,\ x\ge 8+a$
공통부분의 정수의 개수가 3개이므로
$3<x\le 8-a$에서 2개
$8+a\le x<12$에서 1개
$\left(\because \frac{8-a+8+a}{2}>\frac{3+12}{2}\right)$
$\therefore 5\le 8-a<6,\ 10<8+a\le 11$
$\therefore -3\le -a<-2,\ 2<a\le 3$
$\therefore 2<a\le 3$

46. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

① $2<p-q<5$ ② $3\le p-q<5$ ③ $3<p-q\le 6$

④ $5\le p-q\le 6$ ⑤ $2\le p-q<6$

해설

$f(x)=x^2+x-p$, $g(x)=x^2-3x-q$ 라 하면 방정식 $f(x)=0$ 과 $g(x)=0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x)=x^2+x-p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)-p\le 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)-p>0$$

$$\therefore \frac{3}{4}\le p<\frac{15}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $g(x)=x^2-3x-q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=\frac{3}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}-q\ge 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}-q<0$$

$$\therefore -\frac{9}{4}<q\le-\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡에서 $2\le p-q<6$