1. $ax+b>0$ 의 해가 $x<2$ 일 때, $(a+b)x<5b$ 의 해는?

① $x>5$　　② $x>10$　　③ $x<1$

④ $x<5$　　⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$ 에서 $ax>-b$

해가 $x<2$ 이므로

$a<0$ ⋯⋯㉠

$-\frac{b}{a}=2$ ⋯⋯㉡

㉡을 정리하면 $b=-2a$ ⋯⋯㉢

㉢에서 $b=-2a$ 를 $(a+b)x<5b$ 에 대입하면

$(a-2a)x<5\cdot(-2a),\ -ax<-10a$

㉠에서 $a<0$ 이므로 $x<10$

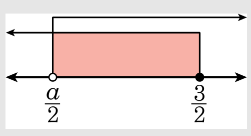
2. 연립부등식 $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{2} \\ 2x > a \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수가 5 개일 때, a 의 값의 범위는?

① $a > -6$ ② $-8 < a \le -6$ ③ $a < -8$

④ $-8 \le a < -6$ ⑤ $-8 \le a \le -6$

해설

x 의 범위가 그림과 같을 때 5 개의 정수해를 갖는다.



$-4 \le \dfrac{a}{2} < -3$ 양변에 2 을 곱하면 $-8 \le a < -6$

3. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라 하면

$45 < (x-2)+x+(x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$\rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \frac{55}{3} \end{cases} \rightarrow 15 < x < \frac{55}{3}$

$\therefore\ x = 16,\ 17,\ 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15 , 17 , 19 이다.

4. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

5. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$
② x는 모든 실수
③ $x \ne 3$인 모든 실수
④ $x = 3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \le 0$
$(x-3)^2 \le 0$
$\Rightarrow x = 3$

6. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$
② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$
③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$
⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$

$x^2-7x+10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

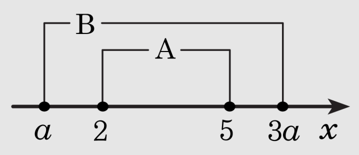
$2 \leq x \leq 5$

$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

$a \leq x \leq 3a(\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2$, $3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

7. $2x-1>0$, $x^2-3x-4<0$를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개　　② 1개　　③ 2개　　④ 3개　　⑤ 4개

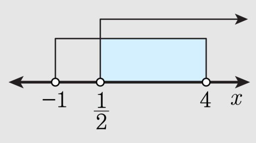
해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$㉠

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4\cdots\cdots$㉡



㉠, ㉡의 공통 부분은

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

8. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

① 9 개 ② 8 개 ③ 7 개 ④ 6 개 ⑤ 5 개

해설

$\begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5 \leq 4 \\ x - 3 > -18 - 2x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -5 \end{cases}$

$\therefore\ -5 < x \leq 3$

9. 연립부등식 $\begin{cases} -2x+4>x+7 \\ 3x+3 \le a \end{cases}$ 의 해가 $x \le -5$ 일 때, a 의 값은 얼마인가?

① 8 ② 9 ③ 12 ④ −11 ⑤ −12

해설

$-2x+4>x+7$
$-2x-x>7-4$
$-3x>3$
$\therefore\ x<-1$

$3x+3 \le a$
$3x \le a-3$
$\therefore\ x \le \dfrac{a-3}{3}$

따라서 $\dfrac{a-3}{3}=-5$ 이므로 $a=-12$ 이다.

10. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-9<6x \\ 4x+12>8x+12a \end{cases}$ 의 해가 존재하도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a>-2$ ③ $a\le -2$
④ $a<2$ ⑤ $a>2$

해설
① $3x-9<6x$, $x>-3$
② $4x+12>8x+12a$, $x<-3a+3$
해가 존재하려면 $-3a+3>-3$, $a<2$

11. 어떤 정수에 3 을 곱하고 5 를 더하면 14 보다 크고, 원래 정수에 4 배하고 2 를 빼면 18 보다 작다고 한다. 이 때, 어떤 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

어떤 정수를 x 라고 하고, 문제의 조건에 따라 두 개의 식을 만든다. "어떤 정수에 3 을 곱하고 5 를 더하면 14 보다 크고"을 식으로 표현하면, $3x + 5 > 14$ 이다. "원래 정수에 4 배하고 2 를 빼면 18 보다 작다"를 식으로 표현하면, $4x - 2 < 18$ 이다. 두 개의 식을 연립방정식으로 표현하면, $\begin{cases} 3x + 5 > 14 \\ 4x - 2 < 18 \end{cases}$ 이고, 이를 간단히 하면, $\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases}$ 이다. 따라서 어떤 정수는 $3 < x < 5$ 이므로 4이다.

12. 다각형의 내각의 합이 $600°$ 이상 $750°$ 이하일 때, 이 다각형은 몇 각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 육각형

해설

다각형의 내각의 합: $180°(n-2)$
$600° \le 180°(n-2) \le 750°$
$600° \le 180°n - 360° \le 750°$
$960° \le 180°n \le 1110°$
$5.3\cdots \le n \le 6.16\cdots$
$\therefore n = 6$

13. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)

ⅰ) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq x \leq 3$

ⅱ) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

14. 이차부등식 $x^2-2(k+2)x+16>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 실수 k의 값을 정하면?

① $-4<k<2$ ② $-6\le k\le 2$ ③ $-8<k<4$
④ $-6<k<2$ ⑤ $-4\le k\le 2$

해설
항상 0보다 크려면 판별식이 0보다 작아야 한다
$D'=(k+2)^2-16<0$에서
$k^2+4k-12<0$
$(k-2)(k+6)<0$
$\therefore -6<k<2$

15. 모든 실수 x 에 대하여 $a(x^2+4) \geq 2x(a+1)$ 이 성립할 때, 실수 a 의 조건은?

① $a < -\frac{1}{3},\ a > 1$ ② $a \leq -\frac{1}{3}$ ③ $a \geq 1$
④ $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ ⑤ $a = 0,\ 1$

해설

주어진 식을 정리하면
$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 4a \geq 0$
$a = 0$ 일 때 $f(x) = -2x < 0$ 인 부분이 있고,
$a < 0$ 이면 $f(x) < 0$ 인 부분이 있다.
따라서 모든 x 에 대하여 성립하려면 $a > 0$
$D/4 = (a+1)^2 - 4a^2 \leq 0$
$\therefore\ 3a^2 - 2a - 1 \geq 0$
$(3a+1)(a-1) \geq 0$
$\therefore\ a \geq 1,\ a \leq -\frac{1}{3}$
$a > 0$ 이므로 $a \geq 1$

16. $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<5$일 때, $ax^2-bx+c-2b>0$의 해를 구하면?

① $x<-1,\ x>4$ ② $x<-4,\ x>1$ ③ $-1<x<4$

④ $-4<x<1$ ⑤ $-4<x<-1$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가$-2<x<5$이면

$a<0$, 해가 $-2<x<5$인 부등식은

$(x+2)(x-5)<0$

$x^2-3x-10<0$에 a를 곱하면

$ax^2-3ax-10a>0$ ($\because\ a<0$)

$\therefore\ b=-3a,\ c=-10a$를

$ax^2-bx+c-2b>0$에 대입

$\therefore\ ax^2+3ax-10a+6a>0$

$ax^2+3ax-4a>0$

(a로 나누면 $a<0$이므로)

$x^2+3x-4<0$, $(x-1)(x+4)<0$

$\therefore\ -4<x<1$

17. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $x<-1$ 또는 $x>2$ 일 때, 이차부등식 $ax^2+3(b+c)x-10(b-c)<0$ 의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1<x<0$ ③ $0<x<10$

④ $-1<x<10$ ⑤ $x>10$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가
$x<-1$ 또는 $x>2$ 이므로 $a>0$
해가 $x<-1$ 또는 $x>2$ 이고
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-2)>0$ $\therefore x^2-x-2>0$
따라서 $a=1,\ b=-1, c=-2$ 이므로
$ax^2+3(b+c)x-10(b-c)<0$ 에 대입하면
$x^2-9x-10<0,\ (x+1)(x-10)<0$
$\therefore -1<x<10$

18. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

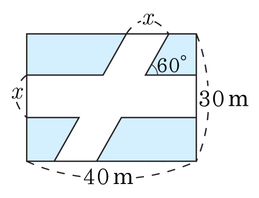
해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$
$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x 대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로
$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은
$x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ \dfrac{\beta+1}{4}$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$
$f(4x-1)=0$에서
$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{4},\ x=\dfrac{\beta+1}{4},$
$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

19. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $40\,\mathrm{m}$, $30\,\mathrm{m}$ 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 $60°$로 교차하도록 만들었다. 이 때, 남은 땅의 넓이가 $600\,\mathrm{m}^2$ 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m ② 6m ③ 8m ④ 10m ⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면

$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$

$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$

$(x-10)(x-60) \geq 0$ 에서 $x \leq 10$ 또는

$x \geq 60$ $(0 < x < 30)$ 이 된다.

그러므로 도로폭의 최대 길이는

$0 < x \leq 10$ 이므로 $10\,\mathrm{m}$ 이다.

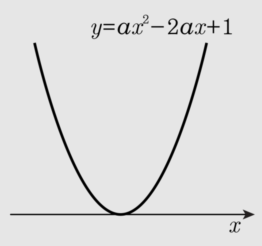
20. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

21. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$　② $1 \le k \le 5$　③ $k \le -1, k \le 5$
④ $k < 1, k > 5$　⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$
$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$
위의 부등식이 항상 만족해야 하므로
방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.
$D = (k-3)^2 - 4 < 0$
$k^2 - 6k + 5 < 0$
$\therefore\ 1 < k < 5$

22. $\begin{cases} (x-4)(x-2) \ge 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 해의 범위가

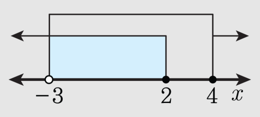
$a < x \le b$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(x-4)(x-2) \ge 0,\ x \le 2, x \ge 4$

$(x+3)(x-4) < 0,\ -3 < x < 4$



$\therefore -3 < x \le 2$

$a = -3,\ b = 2$

$\therefore a + b = -1$

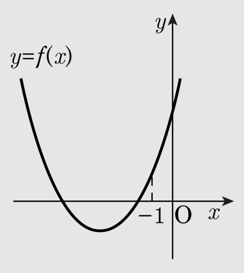
23. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0$, $(k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 -6, -5, -4 의 3 개다.

24. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x+5y < 5 \\ -2 < 2x+7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$ 중 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M+2m$의 값을 구하면?

① -9　② -13　③ -18　④ -22　⑤ -26

해설

$1 < x+5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times (-2) +$ ㉡을 하면
$-10 < -2x-10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢ + ㉣ $= -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면
$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$
따라서, $x+y$의 최댓값은 $-3+1=-2$이고,
최솟값은 $-11+3=-8$이다.
$\therefore M=-2,\ m=-8 \quad \therefore M+2m=-18$

25. $a<0$이고 $a+b=0$일 때, 부등식$(a-b)x-a-2b<0$의 해는?

① $x<-\frac{1}{2}$ ② $x>-\frac{1}{2}$ ③ $x>2$
④ $x<-2$ ⑤ $x>1$

해설

$a+b=0$에서 $b=-a$를 부등식에 대입하면
$(a+a)x-a+2a<0,\ 2ax+a<0,\ 2ax<-a$
$\therefore\ x>-\frac{1}{2}(\because\ 2a<0)$

26. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6 을 곱하면 $2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$,

$4x + 8 \geq 3x - 6 - 6x$,

$x \geq -2$

$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10 을 곱하면 $3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$,

$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3$,

$x \leq 6$

$1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면

$12x - 5 < 8x + 6$,

$4x < 11$,

$x < \frac{11}{4}$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \frac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 1, 2 의 2 개이다.

27. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

> [풀이]
> $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=($ ㉠ $)$ 이 된다.
> $-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=($ ㉠ $)$ 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
> 부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 $($ ㉡ $)$ 이 된다.
> x 값을 $($ ㉠ $)$ 에 대입하면 $y=($ ㉢ $)$ 가 된다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠ $-3x-1$

▷ 정답: ㉡ -1

▷ 정답: ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면
$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$

정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

28. 부등식 $a(x^2-2x+1)>2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 x가 존재할 때, 상수 a의 범위는?

① $a>2$　② $a\geq 2$　③ $a<2$

④ a는 모든 실수　⑤ $a<\pm 2$

해설

$a=2$일 때, $6>0$이므로 x는 모든 실수

$a\neq 2$일 때,

$(a-2)x^2-2(a-2)x+a+4=0\cdots$㉠에서

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(a+4)=-6(a-2)$이므로

i) $a>2$이면, x는 모든 실수

ii) $a<2$이면, $\frac{D}{4}>0$이므로 ㉠의 근을

$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라 하면

부등식의 해는 $\alpha<x<\beta$이므로 x값이 존재한다.

$\therefore$ a는 모든 실수

29. 부등식 $|x^2-1|+3x<3$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 상수 $\alpha+\beta$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.
(ⅰ) $x^2-1\geq 0$,
즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,
$|x^2-1|=x^2-1$이므로 주어진 부등식은
$x^2-1+3x<3,\ x^2+3x-4<0$
$(x+4)(x-1)<0$
$\therefore -4<x<1$

이 때 조건에서 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이므로
이를 만족하는 x값의 범위는 $-4\leq x\leq -1$
(ⅱ) $x^2-1<0$,
즉 $-1<x<1$일 때,
$|x^2-1|=-x^2+1$이므로 주어진 부등식은
$-x^2+1+3x<3,\ x^2-3x+2>0$
$(x-1)(x-2)>0$
$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이 때 조건에서 $-1<x<1$이므로
이를 만족하는 x의 값의 범위는 $-1<x<1$
(ⅰ), (ⅱ)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4<x<1$
따라서 $\alpha=-4,\ \beta=1,\ \alpha+\beta=-3$

30. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20,\ b < 25$ ② $a = 20,\ 0 < b < 25$
③ $a = 20,\ b > 25$ ④ $0 < a < 20,\ b > 25$
⑤ $0 < a \leq 20,\ 0 \leq b \leq 25$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한다
$\Rightarrow\ \ x^2 + 2(2y + 5) + 4y^2 + ay + b > 0$
항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다
$D' = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$
$\Rightarrow\ \ (20 - a)y + 25 - b < 0$
임의의 $x,\ y$에 대해 성립하려면, $a = 20,\ \ b > 25$

31. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $|x-2| < \sqrt{3}$의 해와 같을 때, 이차부등식 $cx^2 + (b+c)x + (a+b+5c) > 0$ 의 해를 구하면?

① $0 < x < 1$　　② $1 < x < 2$　　③ $2 < x < 3$

④ $3 < x < 4$　　⑤ $4 < x < 5$

해설

$|x-2| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x-2 < \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$

$ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 (\because a < 0)$

$-\frac{b}{a} = 4, \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow b = -4a, c = a$

그러면 주어진 식 $cx^2 + (b+c)x + (a+b+5c) > 0$에서

$ax^2 + (-4a+a)x + a - 4a + 5a > 0$

$ax^2 - 3ax + 2a > 0 \ (\because a < 0)$

$x^2 - 3x + 2 < 0$

$(x-2)(x-1) < 0$

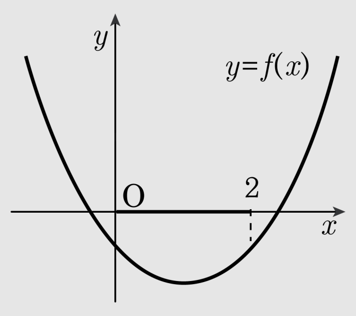
따라서 $1 < x < 2$

32. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ −1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

33. x에 대한 두 부등식 $x^2 + (a-1)x < a$, $6x^2 - x - 1 > 0$을 동시에 만족하는 정수가 꼭 두 개 존재할 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \le a < -3,\ 2 < a \le 3$　② $-3 \le a < -2,\ 3 < a \le 4$

③ $-2 \le a < -1,\ 4 < a \le 5$　④ $-4 < a \le -3,\ 2 \le a < 3$

⑤ $-3 < a \le -2,\ 3 \le a < 4$

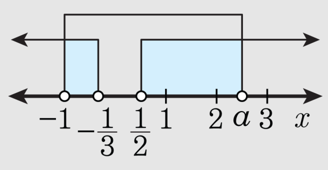
해설

$6x^2 - x - 1 = (2x-1)(3x+1) > 0$

$\Leftrightarrow\ x > \frac{1}{2}$ 또는 $x < -\frac{1}{3}$ ……㉠

$x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a) < 0$

(i) $a > -1$이면 $-1 < x < a$ ……㉡

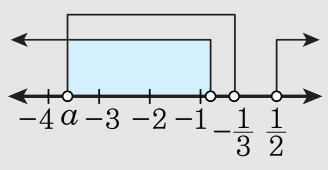


㉠과 ㉡의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면 (즉, 정수 1과 2)

$2 < a \le 3$

(ii) $a = -1$이면 해가 없다.

(iii) $a < -1$이면 $a < x < -1$ ……㉢



㉠, ㉢의 공통 부분에 정수가 두 개만 존재하려면(즉, 정수 -3과 -2)

$\therefore\ -4 \le a < -3$

(i),(ii)(iii)에서 $-4 \le a < -3$, $2 < a \le 3$

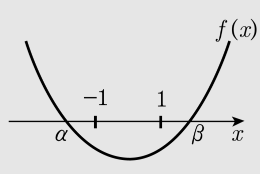
34. 방정식 $x^2 + px + 2p + 1 = 0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p 의 값의 범위는 ?

① $p > -2$　　② $p > -1$　　③ $p < -2$

④ $p < -1$　　⑤ $p < 1$

해설

$f(x) = x^2 + px + 2p + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면



(i) $f(-1) = p + 2 < 0$ $\therefore p < -2 \cdots$ ①

(ii) $f(1) = 3p + 2 < 0$ $\therefore p < -\frac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p < -2$

35. 이차방정식 $x^2+ax+2a-3=0$ 의 두 근이 $-2,\ 1$ 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3}<a\le 2$ ② $-2<a<4$ ③ $-4\le a\le 2$
④ $\frac{2}{3}<a\le 4$ ⑤ $a\ge 6$

해설

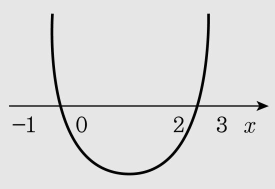
$f(x)=x^2+ax+2a-3$으로 놓으면
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -2와 1 사이에 있으므로
(i) $D=a^2-4(2a-3)\ge 0$에서
$a^2-8a+12\ge 0$, $(a-2)(a-6)\ge 0$
$\therefore\ a\le 2$ 또는 $a\ge 6$
(ii) $f(-2)=4-2a+2a-3>0$에서
$1>0$이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1)=1+a+2a-3>0$에서
$3a>2\quad\therefore\ a>\frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{2}$이므로
$-2<-\frac{a}{2}<1$
$\therefore\ -2<a<4$
따라서 a의 값의 범위는 $\frac{2}{3}<a\le 2$

36. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $-1<\alpha<0$, $2<\beta<3$이 성립하도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a>0$)

① $\frac{2}{3}<a<1$　② $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$　③ $\frac{3}{2}<a<2$
④ $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}<a<3$

해설

$f(0)=-1<0$ 이므로 $y=ax^2-(a+1)x-1$의
그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1)=a+(a+1)-1>0$에서 $a>0$ $\cdots$ ㉠

$f(2)=4a-2(a+1)-1<0$에서 $a<\frac{3}{2}\cdots$ ㉡

$f(3)=9a-3(a+1)-1>0$에서 $a>\frac{2}{3}\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에서 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$

37. $a,\ b,\ c$는 실수이고, $a(a+b+c)>0,\ a(b+2a)<0$을 만족시킬 때, ab $\boxed{가}$ 0, $b(a+b+c)$ $\boxed{나}$ 0이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

① <, <   ② <, >

③ >, >   ④ >, <

⑤ 결정할 수 없다.

해설

$a(a+b+c)>0$에서 $a\neq 0,\ a+b+c\neq 0$임을 알 수 있다.
한편 $a(b+2a)=ab+2a^2<0$에서 $ab<-2a^2<0$이므로 $ab<0$이다.
또 $ab<0$이므로 $ab(a+b+c)^2<0$에서 $\{a(a+b+c)\}\{b(a+b+c)\}<0$이다.
그런데, $a(a+b+c)>0$이므로 $b(a+b+c)<0$이다.

38. 연립부등식 $5x-8<3x+8$, $x-5>-2a$ 를 만족하는 x 중 자연수들의 합이 22 일 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x-8<3x+8$ 을 풀면 $x<8$
$x-5>-2a$ 를 풀면 $x>-2a+5$
$\therefore\ -2a+5<x<8$
이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 합이 22 이므로
$x=4,\ 5,\ 6,\ 7$
따라서 $3\le -2a+5<4$ 이어야 하므로
$\frac{1}{2}<a\le 1$
그런데 a 가 자연수이므로 $a=1$ 이다.

39. 부등식 $k-1>\left|\frac{1}{2}x-1\right|$ 의 해가 존재하기 위한 상수 k 의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k>1$

해설

$k-1>\left|\frac{1}{2}x-1\right|$ 에서

$-k+1<\frac{1}{2}x-1<k-1$

$-k+2<\frac{1}{2}x<k$

$-2k+4<x<2k$

이 때, 부등식의 해가 존재하기 위해서는

$-2k+4<2k$

$\therefore\ k>1$

40. 어느 공장에서 생산하는 제품은 한 상자에 20 개의 제품이 들어 있고 한 상자 분량의 제품을 만드는데 드는 비용은 40000 원이고 한 상자마다 불량품이 일정하게 나타난다고 한다. 제품 한 개 당 가격은 2600 원이고 한 상자 당 원가의 10% ~ 15% 의 이익을 올리려고 한다면 한 상자마다 나타나는 불량품은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$40000\,(1+0.10) \le (\text{제품 한 상자의 가격}) \le 40000\,(1+0.15)$

즉 $44000 \le (\text{제품 한 상자의 가격}) \le 46000$

이어야 하므로 불량품의 개수를 x 라 하면

$44000 \le (20-x) \times 2600 \le 46000$

$\therefore\ \frac{30}{13} \le x \le \frac{40}{13}$

따라서 불량품은 최대 3 개이다.

41. 4% 소금물 300g 과 8% 의 소금물을 섞어서 7% 이상의 소금물을 만들었다. 이 때, 8% 의 소금물은 몇 g 이상 섞었는가?

① 600g ② 700g ③ 800g
④ 900g ⑤ 1000g

해설
8% 의 소금물의 양을 xg 이라 하면
$\frac{4}{100} \times 300 + \frac{8}{100} \times x \geq \frac{7}{100} \times (300 + x)$
$1200 + 8x \geq 2100 + 7x$
$8x - 7x \geq 2100 - 1200$
$\therefore \ x \geq 900$

42. 지현이는 친구들과 놀이동산에서 관람차를 타기로 했다. 관람차 한 칸에 6 명씩 타면 8 명이 남고, 7 명씩 앉으면 마지막 칸에는 3 명 이상 5 명 이하가 타게 된다고 한다. 다음 중 관람차의 칸 수가 될 수 <u>없는</u> 것을 모두 골라라.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

관람차가 x 칸으로 이루어져 있다고 하면, 사람 수는 $6x+8$ 이다. 7 명씩 탈 경우 $x-1$ 칸 까지는 7 명씩 타지만 마지막 칸에는 3 명 이상 5 명 이하가 타게 된다. 3 명만 탈 경우를 식으로 나타내면, $7(x-1)+3$ 이고, 5 명이 탈 경우를 식으로 나타내면 $7(x-1)+5$ 이다. 사람 수는 관람차에 7 명씩 타고 마지막 칸 만 3 명 이상일 경우와 5 명 이하일 경우의 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $7(x-1)+3 \le 6x+8 \le 7(x-1)+5$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 7(x-1)+3 \le 6x+8 \\ 6x+8 \le 7(x-1)+5 \end{cases}$ 간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 12 \\ x \ge 10 \end{cases}$

$10 \le x \le 12$

따라서 관람차는 10 또는 11 또는 12 칸 이다.

43. 9 시에 문을 여는 극장에 8 시 30 분부터 1 분에 10 명씩 사람들이 몰려와 줄을 서기 시작하고, 이후에도 계속 시간당 같은 인원이 꾸준히 극장에 온다. 9 시부터 3 개의 표 발매 창구에서 표를 팔면 9 시 15 분에 줄 서 있는 사람이 없어질 것으로 예상된다. 이때, 줄 서 있는 사람이 없어지는 시간을 7 분 앞당기려면 발매 창구를 최소 몇 개 더 열어야 하는지 구하여라. (단, 창구 하나당 발매하는 표의 수는 모두 같다.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

9 시에 발매를 시작하기 전에 이미 줄 서 있는 사람 수가 $30 \times 10 = 300$ (명) 이고
1 분 동안 발매하는 표가 x 장이라고 하면
3 개의 발매 창구에서 표를 팔면 15 분 동안 모두 판매하므로
$3 \times 15x = 300 + 15 \times 10 \quad 45x = 450 \qquad \therefore x = 10$,
한편 모두 판매하는 시간을 7 분 앞당기면 8 분 동안 모두 판매해야 하므로
발매 창구의 개수를 a 개라 하면
$a \times 10 \times 8 \geq 300 + 10 \times 8, 80a \geq 380$
$\therefore a \geq \frac{19}{4}$
따라서 발매창구가 적어도 5 개 있어야 하므로 최소 2 개의 발매 창구를 더 열어야 한다.

44. 실수 a, b, c에 대하여 $a < b < c$일 때, 부등식 $|x-a| < |x-b| < |x-c|$를 만족시키는 x 의 범위는?

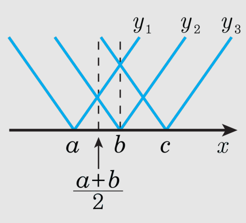
① $b < x < c$ ② $\frac{1}{2}(b+c) < x$
③ $x < \frac{1}{2}(b+c)$ ④ $\frac{1}{2}(a+b) < x < b$
⑤ $x < \frac{1}{2}(a+b)$

해설

$|x-a| < |x-b|$의 양변을 제곱하면
$x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2$에서
$2(a-b)x > (a-b)(a+b)$
$\therefore x < \frac{a+b}{2} (\because a-b<0) \cdots\cdots$ ①
또, $|x-b| < |x-c|$의 양변을 제곱하여
정리하면 $x < \frac{b+c}{2} \quad \cdots\cdots$ ②
$\therefore$ ①, ②를 동시에 만족하는
x의 범위는 $x < \frac{a+b}{2}$

해설

$y_1 = |x-a|$, $y_2 = |x-b|$, $y_3 = |x-c|$라 하고 각각의 그래프를 그리면 그래프에서 $y_1 < y_2 < y_3$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$y = x-a$와 $y = -x+b$의 교점 $x = \frac{1}{2}(a+b)$보다 작을 때이다.
$\therefore \ x < \frac{1}{2}(a+b)$



45. x, y, z는 실수이고, 두 관계식 $x+y+z=2, 2x^2-yz=4$를 만족시킨다. 이 때 $xy+yz+zx$의 최솟값을 구하여라.

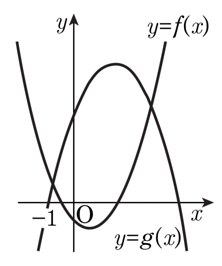
▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$y+z=2-x,\ yz=2x^2-4$에서
y, z를 두근으로 하는 이차방정식은
$t^2-(2-x)t+2x^2-4=0$이므로
$D=(2-x)^2-4(2x^2-4)\geq 0$
$\therefore\ -2\leq x\leq \frac{10}{7}$
따라서 $xy+yz+zx=yz+(y+z)x$
$=(2x^2-4)+(2-x)x$
$=(x+1)^2-5$에서 $x=-1$일 때 최솟값 -5

46. 이차항의 계수가 각각 1, -1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이고 $f(2)=1$일 때, $g(1)$ 의 값은?



① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$y=f(x)$의 y절편이 -1이므로 $f(x)=x^2+ax-1$로 놓을 수 있다.

$f(2)=2a+3=1$에서 $a=-1$

$\therefore f(x)=x^2-x-1$

$g(x)=-x^2+bx+c$로 놓으면 $f(x)-g(x) \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$이므로

$f(x)-g(x)=2x^2-(1+b)x-1-c=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$

따라서, $1+b=4$, $-1-c=-6$에서

$b=3$, $c=5$

$\therefore g(x)=-x^2+3x+5$

$\therefore g(1)=7$