1. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$ (나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

2. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$

$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$

$\therefore\ a+b=-10$

3. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15　② 16　③ -16　④ 17　⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$

$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로

$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

4. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma$

$=1-2+4+3=6$

5. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 10　　② 20　　③ 30　　④ 40　　⑤ 50

해설

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{17}{1} = 17$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a} = -\frac{(-10)}{1} = 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (8)^2 - 2 \cdot (17) = 30$$

$$-2\alpha\beta\gamma = -2 \cdot 10 = -20$$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma = 10$$

6. 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \ \alpha\beta\gamma=-1$이므로
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(2)=$
$9-4=5$

7. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x = -1$을 대입하면

$(-1)^3 - 4 - 1 + k = 0 \quad \therefore k = 6$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$에서 $\alpha + \beta = 5$

$\therefore k + \alpha + \beta = 11$

8. 방정식 $x^3-5x^2+2x+1=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)$

$=1+2-(-1)-5=-1$

9. x에 관한 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2,\ \alpha\beta\gamma = -4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$

$= 1 - 3 + 2 + 4 = 4$

10. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma=0$이므로 주어진 식은 $\dfrac{-\alpha}{\alpha}+\dfrac{-\beta}{\beta}+\dfrac{-\gamma}{\gamma}=-3$이 된다.

11. 다음은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 유도하는 과정을 나타낸 것이다. 이 때, (가) ~ (마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

> 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 하면 이 방정식의 좌변은 다음과 같이 인수분해할 수 있다.
> $ax^3+bx^2+cx+d=a(\text{(가)})(x-\beta)(x-\gamma)$
> 이 때, 이 등식의 우변을 전개하여 정리하면
> $ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\text{(나)})x^2+a(\text{(다)})x-a(\text{(라)})$가 되는데
> 이것은 x에 대한 ((마))이다.
> 따라서, 이 등식의 동류항의 계수는 서로 같아야 하므로
> $b=-a(\text{(나)}),\ c=a(\text{(다)}),\ d=-a(\text{(라)})$
> 각 식의 양변을 a로 나누고, 좌변과 우변을 바꾸어 쓰면
> $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$
> $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$
> $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

① (가) $x+a$ ② (나) $\alpha+\beta+\gamma$

③ (다) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ ④ (라) $\alpha\beta\gamma$

⑤ (마) 항등식

해설

(가) $x-\alpha$

12. 삼차방정식 $x^3-2x^2+ax+6=0$ 의 세 근 α, β, γ 사이에 $\alpha+\beta=\gamma$ 인 관계가 성립할 때, a 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -2 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^3-2x^2+ax+6=0$ 에서

$\alpha+\beta+\gamma=2 \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a \cdots\cdots$ ㉡

$\alpha\beta\gamma=-6 \cdots\cdots$ ㉢

문제 조건에서 $\alpha+\beta=\gamma$ 이므로

㉠에서 $2\gamma=2, \quad \therefore \gamma=1$

㉢에 $\gamma=1$ 을 대입하면, $\alpha\beta=-6$

㉡에서 $\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=\alpha\beta+\gamma^2=a$

$\gamma=1, \ \alpha\beta=-6$ 을 대입하면 $-6+1=a$

$\therefore \ a=-5$

13. x의 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 105 = 0$의 세 근이 모두 2보다 큰 정수일 때, $p + q$의 값을 구하면?

① 56 ② 21 ③ 10 ④ -10 ⑤ -21

해설

세 근을 α , β , γ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해서

$\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = 105$

마지막 식에서 $\alpha\beta\gamma = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore$ 세 근은 3, 5, 7 이다.

$\therefore \ p = -(3+5+7) = -15$,

$q = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 15 + 35 + 21 = 71$

$\therefore \ p + q = 56$

14. 삼차방정식 $x^3+ax+16=0$이 중근 α와 다른 실근 β를 가질 때, 상수 a의 값은?

① -12 ② -14 ③ -16 ④ -18 ⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\alpha+\beta=0,\ \beta=-2\alpha$

$\alpha\times\alpha\times\beta=-16$에서

$-2\alpha^3=-16,\ \alpha=2,\ \beta=-4$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

일차항의 계수 $=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha=a$

$\therefore\ a=-12$

15. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$ 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$

$(-1)\times2+2\times3+(-1)\times3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$

세 근의 곱 $(-1)\times2\times3=-6 \quad \therefore c=6$

$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

16. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값은?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -3 ⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1,\ b^3 - 6b = -1,\ c^3 - 6c = -1$이므로
$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$

17. x에 관한 삼차방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-\gamma^3)$ 의 값은?

① 4　② 2　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

$x^3+x^2+x+1=0$에서 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=-1$

또한 $x^3+x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$를 곱하면

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=0,\quad x^4=1$

$\therefore \alpha^4=\beta^4=\gamma^4=1,\quad \alpha^3=\dfrac{1}{\alpha}, \beta^3=\dfrac{1}{\beta}, \gamma^3=\dfrac{1}{\gamma}$

$\therefore$(준식)$=(1-\dfrac{1}{\alpha})(1-\dfrac{1}{\beta})(1-\dfrac{1}{\gamma})=1-(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma})+(\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha})-\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}$

$=1-\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}+\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}=1+1+1+1=4$

해설

$x^3+x^2+x+1=0$을 인수분해 하면 $(x+1)(x^2+1)=0$

그러므로 $\alpha=-1, \beta=i, r=-i$라 놓을 수 있다.(순서를 바꾸어도 상관 없으므로)

$(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-r^3)=(1+1)(1+i)(1-i)$

$=2(1+1)=4$