

1. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 의 모든 실근의 합은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 를 전개하면

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 30 = 0$$

$x = 5$ 를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$$

$$(x-5)(x^2 - x + 6) = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

2. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 \therefore 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

3. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서

$x^2 - 2x = t$ 로 놓으면

$$t(t-2) - 3 = 0,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t-3)(t+1) = 0$$

$\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$

(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$

(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$\therefore x = 1$ (중근)

따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

4. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 에서
 $x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $x^2 = 3$ 일 때, $x = \pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2 = -1$ 일 때, $x = \pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

5. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, $a - 2b + c$ 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면
 $\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 3$
구하려는 방정식의 세 근의 합
 $-1 + 2 + 3 = 4 \therefore a = -4$
 $(-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -2 + 6 - 3 = 1 \therefore b = 1$
세 근의 곱 $(-1) \times 2 \times 3 = -6 \therefore c = 6$
 $\therefore a - 2b + c = -4 - 2 + 6 = 0$

6. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합은?

- ① 30 ② 25 ③ 23 ④ 18 ⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$ 라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

i) $D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0$

$\therefore a < -8$ 또는 $a > 4$

ii) $a > 0$

iii) $8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$

$\therefore 4 < a < 8$ 이므로 $a = 5, 6, 7$

7. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 이 중근을 가질 때, 실수 a 의 값을 모두 구하면?

① -1

② 0, 8

③ -1, 8

④ -1, 0, -8

⑤ -1, 0, 8

해설

(i) $x=1$ 을 중근으로 가질 때

$x=1$ 을 $x^2-ax+2a=0$ 에 대입하면 $a=-1$

(ii) $x^2-ax+2a=0$ 이 중근을 가질 때

$$D = a^2 - 8a = 0$$

$\therefore a = 0$ 또는 8

(i), (ii)에 의하여 $a = -1, 0, 8$

8. 연립방정식 $x+y+z = -\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx = -\frac{5}{2}$, $xyz = -1$ 을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서 x, y, z 를 세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$$t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2) = 0$$

$\therefore (x, y, z) =$

$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right), \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$

$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

9. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \dots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$ 이 되게 하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x^2+x+1=0 \text{의 한 근 } \omega$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \dots + \frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n 의 최솟값은 2