1. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

2. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2 ② $-1+\sqrt{2}$, -3 ③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

3. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0,$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

4. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0,\ (t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ⅱ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

5. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$

$(-1)\times 2+2\times 3+(-1)\times 3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$

세 근의 곱 $(-1)\times 2\times 3=-6 \quad \therefore c=6$

$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

6. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a의 값들의 합은?

① 30　② 25　③ 23　④ 18　⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

i) $D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0$

$\therefore a < -8$ 또는 $a > 4$

ii) $a > 0$

iii) $8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$

$\therefore 4 < a < 8$ 이므로 $a = 5,\ 6,\ 7$

7. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 모두 구하면?

① -1 ② $0, 8$ ③ $-1, 8$

④ $-1, 0, -8$ ⑤ $-1, 0, 8$

해설

(i) $x=1$을 중근으로 가질 때

$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$

(ii) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때

$D=a^2-8a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 8

(i), (ii)에 의하여 $a=-1,\ 0,\ 8$

8. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$$

$$\therefore\ (x, y, z)=$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right), \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$

$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

9. 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하고 $f(n)=1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$라 정의할 때, $f(n)=0$이 되게 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^2+x+1=0$의 한 근 ω

$\Rightarrow \omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$$f(n)=1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1)=1+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega+1}{\omega}=\frac{-\omega^2}{\omega}=-\omega$$

$$f(2)=1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2}=0$$

자연수 n의 최솟값은 2